ORSAY
Série A
N° 1452

Exemplaire inscrit
aux archives originales
du Centre de Documentation
C. N. R. S.
sous le N° A - O - 11051

THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS - SCIENCES

PAR

Michel LASSALLE

CONTRIBUTION AU DÉVELOPPEMENT DU PROGRAMME NON LINÉAIRE DE LA THÉORIE AXIOMATIQUE DES CHAMPS

Soutenue le 18 Avril 1975 devant la commission d'examen

MM.	R. OMNES	Président
	J. BROS	Directeur de Thèse
	H. EPSTEIN	Rapporteur
	B. MALGRANGE	Examinateurs
	R. STORA	

ORSAY
Série A
N° 1452

Exemplaire inscrit
aux archives originales
du Centre de Documentation
C. N. R. S.
sous le N° A - O - 11051

THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS - SCIENCES

PAR

Michel LASSALLE

CONTRIBUTION AU DÉVELOPPEMENT DU PROGRAMME NON LINÉAIRE DE LA THÉORIE AXIOMATIQUE DES CHAMPS

Soutenue le 18 Avril 1975 devant la commission d'examen

MM.	R. OMNES	Président
	J. BROS	Directeur de Thèse
	H. EPSTEIN	Rapporteur
	B. MALGRANGE	Examinateurs
	R. STORA	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

R E M E R C I E M E N T S

Je remercie Monsieur le Professeur R. Omnès qui a bien voulu présider le jury de cette thèse et Monsieur le Professeur B. Malgrange qui a accepté d'en faire partie.

Je suis reconnaissant à D. Fotiadi, J. Lascoux et T. N. Truong qui en m'accueillant dans des conditions particulièrement difficiles au Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique m'ont permis de mener à bien ce travail.

Tout au long de sa préparation, j'ai bénéficié de l'aide irremplaçable de J. Bros qui m'a généreusement fait profiter de son expérience et à qui je dois les idées essentielles : je tiens à lui exprimer tout particulièrement ma reconnaissance.

Pour leur intérêt constant et de fructueuses discussions, je remercie également C. de Calan, H. Epstein, D. Iagolnitzer, J. Lascoux, B. Souillard et R. Stora.

Pour la réalisation matérielle de ce travail, je remercie Mademoiselle A. Flouquet, Madame F. Andalo et le secrétariat du Centre de Physique Théorique.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548103_0020

P R E F A C E

Les travaux présentés ici concernent pour l'essentiel le programme non linéaire (hors de la couche de masse) de la théorie axiomatique des champs.

Le but de ce programme est l'extension du domaine d'analyticité primitif (c'est-à-dire issu des seules propriétés linéaires) des fonctions de n points, à partir d'une exploitation systématique de la structure "à plusieurs particules" de la théorie quantique des champs.

Cette structure non linéaire est formulée dans les "relations de complétude asymptotique" obtenues heuristiquement par Glaser, Lehmann et Zimmermann en 1957 et rendues depuis complètement rigoureuses par Steinmann en 1968.

Leur traduction en termes de propriétés analytiques pour les fonctions de n points passe par la définition et l'introduction rigoureuse en théorie axiomatique de fonctions de n points dites "irréductibles d'ordre p" dans certains canaux et par l'étude des propriétés d'analyticité globales améliorées que ces fonctions sont susceptibles de posséder : dans le canal considéré, leur seuil serait relevé à la masse totale d'un système de (p+1) particules se déplaçant ensemble dans cette voie.

Cette incorporation à la théorie axiomatique de la notion perturbative d'irréductibilité fut proposée en 1960 par Symanzik et menée à bien par Bros en 1967 dans le cas particulier $p = 2$, $n = 4$ pour un champ pseudo-scalaire.

On trouvera ici les premiers éléments d'un déroulement systématique du programme de Symanzik dans le formalisme analytique et algébrique maintenant classique de Steinmann-Ruelle-Araki.

La première partie présente d'abord d'une manière plus détaillée que ci-dessus le programme non linéaire hors de la couche de masse, ses principales étapes et les résultats susceptibles d'y être obtenus en ce qui concerne la structure analytique des fonctions de n points.

Elle est consacrée ensuite à une étude préliminaire nécessaire au bon déroulement de ce programme : celle de la conservation des propriétés analytiques et algébriques primitives des fonctions de n points par convolution associée à un graphe.

Les démonstrations de certains résultats mathématiques (lemmes de complétion analytique, structure de l'algèbre abstraite de Steinmann-Ruelle-Araki, etc...) que leur longueur et leur technicité avaient empêché de figurer dans la publication originale sont regroupées dans une seconde partie.

Finalement la troisième et la quatrième parties concernent l'étude de la structure à une et à deux particules des fonctions de n points d'un champ scalaire (pour n quelconque). On y définit des fonctions de n points irréductibles d'ordre un (resp. deux) et on montre que leurs propriétés analytiques supplémentaires sont équivalentes aux relations de complétude asymptotique avec une (resp. deux) particules intermédiaires.

Les première et troisième parties ont été publiées dans la revue "Communications in Mathematical Physics".

P R E M I E R E P A R T I E

CONVOLUTION DE FONCTIONS DE n POINTS ASSOCIEE A UN GRAPHE

Commun. math. Phys. 36, 185—226 (1974)
© by Springer-Verlag 1974

Analyticity Properties Implied by the Many-Particle Structure of the n-Point Function in General Quantum Field Theory

I. Convolution of n-Point Functions Associated with a Graph

M. Lassalle

Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique, Paris, France

Received November 23, 1973; in revised form February 8, 1974

Abstract. This is the first of a series of papers devoted to the derivation of analyticity properties in the non-linear program of general quantum field theory, following the line of the "many particle structure analysis" due to Symanzik. In this preliminary paper, "convolution products" are associated with graphs whose vertices v represent general n_v-point functions. Under convergence assumptions in Euclidean directions, it is proved that any such convolution product H^G associated with a graph G with N external lines is well defined as an analytic function of the corresponding N four-momentum variables. The analyticity domain of H^G is proved to contain the corresponding N-point "primitive domain" implied by causality and spectrum and the various real boundary values of H^G satisfy all the relevant linear relations. For appropriate boundary values, the convolution products generalize the perturbative Feynmann prescription. As a by-product of this study, it is proved that in any perturbative theory using "superpropagators" with Euclidean convergence, Feynmann amplitudes that satisfy all the requirements of the linear program can be defined without the help of a regularization.

1. Introduction

Since the axioms of general quantum field theory were proposed [1, 2], many papers have been devoted to the study of the analyticity properties of the n-point Green's functions of the fields. Interest was particularly taken in the existence of regions of analyticity lying inside the complex mass shell manifold $\mathscr{M}^c$ since in view of the reduction formulae [3, 4] this entails the analytic character of the n-particle scattering amplitudes.

It was by exploiting the so called *linear properties* of the Green's functions that the notion of a "primitive domain" of analyticity of the n-point function in momentum space was derived [5–7]. Then it was soon realized that on one hand this primitive domain did not intersect

$\mathscr{M}^c$, but that on the other hand it was not a natural domain of holomorphy, so that general techniques of analytic completion could be applied which allowed to reach the mass shell. In fact using different methods, it was proved that the four-particle scattering amplitude is the boundary value of an analytic function on the complex mass shell in a domain including Lehmann ellipses in t [8], cut planes [9] or crossing regions in s [10, 11], etc.... More recently, it was proved that in the neighbourhood of any physical point, the general n-particle scattering amplitude can always be decomposed as the sum of a relatively small number of boundary values of functions which are analytic on $\mathscr{M}^c$ [12]. However when n increases, the analyticity properties on the mass shell are more and more difficult to derive from the linear program. For instance, the number of analytic functions obtained so far in the framework of [12] may be larger than one and the regions where this critical situation occurs are in fact wide neighbourhoods of some thresholds singularities.

Now if we have in mind the macrocausal approach of S-matrix theory [13, 14] as well as all examples of perturbation theory which have been studied by now, we could think that local analyticity at all the points of the physical region outside the Landau surfaces should be a rather reasonable goal to be reached starting from the axioms of local field theory, provided that we make an extensive use of all the *non-linear properties* of the theory.

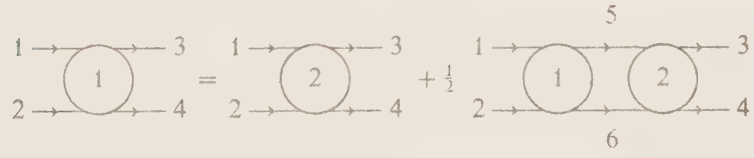
At present there are at least two lines of investigation to incorporate the non-linear properties of field theory in the analytic framework. The first one starts from the results of the linear program on the mass shell and applies the positivity conditions of absorptive parts and the unitarity relations of scattering amplitudes to get new analyticity properties. Up to now, it has been very successful in the case of the four-point function [15, 16] and has led to important improvements of the analyticity domain (the Martin ellipses). The use of unitarity (for instance through partial waves) has also led to continuation in a second sheet across the elastic region. Recently a generalization of these methods has been undertaken with promising results [17].

The purpose of the present series of papers is to develop an alternative and rather different way of incorporating the non-linear properties in the analytic framework. Indeed as early as 1960, Symanzik sketched a very interesting program [18] which he called "Many Particle Structure Analysis" (M.P.S.A.) of Green's functions, where he proposed to incorporate in general quantum field theory the perturbative notion of the *p-particle irreducible part* of a Green's function with respect to a certain channel. This, he conjectured, should lead to important improvements in the knowledge of the analytic structure of Green's functions, since a

larger analyticity domain could be expected for these irreducible parts. However at that time, the analyticity properties of the n-point functions in the framework of the linear program had not yet been studied far enough to allow the exploitation of Symanzik's ideas from the point of view of analyticity properties. It is our purpose in the present series of papers to develop the M.P.S.A. program in a way which should make clear the analyticity properties there involved, following a plan proposed by Bros in 1967 [19, 20].

Let us first recall the main ideas of Symanzik's program. The perturbative expansion of n-point Green's functions in terms of Feynmann graphs introduces the notion of the *p-particle irreductible part of a Green's function* in the following way. Having chosen a certain channel, namely a partition of the set of all external four-momentum variables into two subsets (n_{in} incoming and n_{out} outgoing four-momenta), any term of a perturbative expansion is said to be p-particle irreducible with respect to this channel if at least $(p+1)$ internal lines of the corresponding Feynmann graph F must be untied in order to get two disjoint connected subgraphs in such a way that in this process the set of all external lines of F should be split up according to the above partition $(n_{\text{in}}, n_{\text{out}})$. The formal sum of all such p-particle irreducible contributions to the expansion of any n-point Green's function is called the p-particle irreducible part of this function with respect to the considered channel.

Now it turns out that the various p-particle irreducible n-point Green's functions thus introduced satisfy as formal series of Feynmann graphs certain integral relations, among which the complete Bethe-Salpeter equation is the simplest and best known example. This equation usually written in the graphic form



has the following algebraic meaning:

$$\tilde{t}_c^{(1)}(p_1,\ldots,p_4) = \tilde{t}_c^{(2)}(p_1,\ldots,p_4) + \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} \tilde{t}_c^{(1)}(p_1,p_2,p_5,p_6)\,\tilde{t}_c^{(2)}(-p_5,-p_6,p_3,p_4) \cdot G^{-1}(p_5)\,G^{-1}(p_6)\,\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_5-p_6)\,d^4p_5\,d^4p_6\,.$$

Here $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0$ and $\tilde{t}_c^{(p)}(p_1,\ldots,p_4)$ denotes the p-particle irreducible part $(p=1,2)$ of the connected (or truncated) four-point time-ordered product in momentum space (that is the Fourier transform of the con-

nected vacuum expectation value of the time-ordered product of four fields, up to the factor $\delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^{4} p_i\right)$ with respect to the channel $[(1,2)_{\text{in}}; (3,4)_{\text{out}}]$. $G(p)$ denotes the complete two-point Green's function (with the Feynmann prescription).

The basic idea of Symanzik's program was then the following: once extracted from the perturbative framework, all the integral identities of this type should provide a basis for a rigourous introduction of the p-particle irreducible parts of all the n-point Green's functions in general quantum field theory. Indeed from a more thorough investigation of the algebra there involved, which will be found in a forthcoming paper [21], it results that any p-particle irreducible n-point function can be defined as the solution of a Fredholm equation, if all the $(p-1)$-particle irreducible n-point functions are supposed to be given.

Symanzik then conjectured that a double recursion over p and n, starting from the n-point Green's functions submitted to all the requirements of the linear program, should allow one to introduce p-particle irreducible n-point functions satisfying the following properties:

i) these functions exist for any p and n, and any channel;

ii) each of them satisfies all the analytic and algebraic properties of the linear program as well as the complete Green's functions do;

iii) once extracted from the perturbative graphic interpretation, the *irreducibility property* gets the following general meaning: for any p-particle irreducible n-point function (in a given channel) the absorptive part in this channel takes its threshold value at the total square mass of a system of $(p+1)$ particles (with relevant quantum numbers) travelling together in the corresponding channel. It is in the proof of this third property that the non-linear properties of general quantum field theory should play a crucial role.

However the functional formalism which was used in [18], though very powerful in many respects, does not seem to be the most suitable for the derivation of analyticity properties since it does not yield the complete analytic structure of the Steinmann-Ruelle-Araki generalized Green's functions [5–7]. Actually as early as 1967, Bros has proposed a general method of incorporating the M.P.S.A. program in the framework of analyticity properties [19, 20] which he carried through successfully in the special case $n=4$, $p=2$ which makes use of the Bethe-Salpeter equation. The aim of the present series of papers is to investigate this general non-linear program whose main steps are the following.

i) Once extracted from the perturbative framework, the integral equations which relate the various irreducible functions must be made meaningful in the sense of analytic functions. For this purpose, once we have recalled the primitive structure of the n-point functions deduced

from the linear properties of the theory (namely existence of a primitive domain of analyticity, Steinmann relations, connection with the time-ordered product), we shall need to prove that this structure is preserved by "G-convolution" in the following sense.

Consider any connected graph G with N external lines. With any vertex v incident to n_v lines, associate a n_v-point function $H^{(n_v)}$.

Define a prescription of integration on the complex four-momenta associated with the internal lines. Then the object H^G thus obtained (which we shall call "convolution product associated with G") is an analytic function of the N external four-momentum variables which enjoys all the analytic and algebraic properties of the primitive structure of a N-point function.

The present paper is devoted to the proof of this conservation property which is the first step of the non-linear program.

ii) As a second step, we shall turn to the introduction of irreducible functions through a double recursion over p and n: assuming the existence of p-particle irreducible n-point functions for any channel, with $p \leqq p_0 - 1$ and n arbitrary, any p_0-particle irreducible n-point function is introduced as the solution of a certain integral relation suggested by the perturbative framework. As a result of i), this equation makes sense as a Fredholm equation in the *complex* n-point primitive domain. Then the classical Fredholm theory allows one to prove that the solution enjoys all the analytic and algebraic properties of the primitive structure of the n-point function. However as already pointed out in [19], additional regularity assumptions have to be made to ensure that the boundary values of this function are actually temperate distributions.

This second step of the program can be successfully achieved and will be reported in a forthcoming second paper in the announced series [21].

iii) The next step of the program will be the proof that the n-point function thus introduced is indeed p_0-particle irreducible in the considered channel. It is in this third step of the program that the non-linear properties of general quantum field theory will play a crucial role through the Glaser-Lehmann-Zimmermann relations [22]. These relations, obtained through an extensive use of reduction formulae and completeness of asymptotic states, are the field theoretic off-shell extrapolations of the unitarity relations.

Partial results have been obtained so far in this direction and will be reported in [21]. A generalization of the method there used is at present under study.

iv) Once it is proved, the existence of irreducible functions can certainly lead to important improvements of our knowledge of the analyticity domain of the n-point function. Indeed we notice that all the results

of the linear program (Lehmann ellipses, crossing regions, etc. ...) apply to the irreducible functions with the improvements due to the raising of the thresholds. Then this *improved* primitive analytic structure allows one to enlarge the analyticity domain of the complete n-point function in a way which we shall give only a brief account of by getting back to the special case investigated in [19].

Using the Bethe-Salpeter equation as a Fredholm equation in the opposite way, it was shown there that the better analyticity properties of the two-particle irreducible four-point function entail the existence of an analytic continuation of the complete four-point function in a second sheet across the elastic part of the physical region, a result which can certainly not be obtained in the framework of the linear program.

This fact indicates the possibility that, using larger and larger values of p, the improved analytic structure of the p-particle irreducible n-point functions would yield *local analyticity* properties for the complete n-point function in higher and higher parts of the physical region. Pieces of the *Landau surfaces* would then probably come out as isolated singularities through pinching-type arguments quite similar to those already encountered in the study of the analyticity properties of Feynmann integrals.

This step will be fully investigated further in the announced series.

Let us now come back to the present paper which is devoted to the first step of the non-linear program. In Section 2, the algebraic and analytic primitive structure of the n-point functions is fully recalled. Section 3 introduces the notion of convolution product associated with a graph. The central property to be proved in this paper (the conservation of the primitive structure of the n-point functions) is exposed there as well as the general method used to get it. Sections 4 and 5 are devoted to the proof. In Section 6 it is shown that the convolution products generalize Feynmann graphs, in a sense which will be made clearer there. An application to perturbation theory is indicated in Section 7 as a by-product of our study. Finally an appendix is devoted to some technical aspects of the central proof.

2. The Primitive Structure of the n-Point Function

We start from the following facts which have been proved from the general principles of local field theory [5–7, 9, 23]:

i) The existence of a primitive domain of analyticity for the n-point function $H^{(n)}(k)$. Here the argument $k = p + iq$ denotes the set of n complex four-vectors $\{k_i = p_i + iq_i,\ 1 \leqq i \leqq n\}$ linked by the relation $\sum_{i=1}^{n} k_i = 0$. The first part of this section is devoted to the description of this domain.

ii) The so called "Steinmann relations" which are linear relations between the various real boundary values of the n-point function. These relations will be studied in the second part of this section.

iii) The "Ruelle prescription" which connects the various real boundary values of $H^{(n)}$ with the Fourier transform of the connected (or truncated) vacuum expectation value of the time-ordred product of n fields. It will be described in the third part of this section.

2.1 The Primitive Domain

It is composed of the union of a certain family of tubes $\{\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ in the linear manifold $\left\{k \in \mathbb{C}^{4n} : \sum_{i=1}^{n} k_i = 0\right\}$ with appropriate complex neighbourhoods of real regions which connect the various tubes together. (We recall that a tube is a domain invariant under real translations.) In order to describe the family of tubes $\{\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ some definitions are needed. Let us first specify our notations: in the following X will always denote the set $\{1, 2, \ldots, n\}$ of indices numbering the different four-vectors $\{k_1, \ldots, k_n\}$. $\mathcal{P}^*(X)$ will denote the set of proper subsets of X and $(I, X \setminus I)$ any partition of X. We shall consider the space $\mathbb{R}^{n-1}$ of the n independent variables $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ linked by the relation $\sum_{i=1}^{n} s_i = 0$; and similarly the space $\mathbb{R}^{4(n-1)}$ of the n four-vectors $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ linked by the relation $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0$. Moreover s_I will denote $\sum_{i \in I} s_i$ and similarly $p_I = \sum_{i \in I} p_i$. Then we have the following

Definition 1. Let us consider the "triangulation" of the space $\mathbb{R}^{n-1}$ of the variable $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$ by the family of planes $\{s_I = 0, I \in \mathcal{P}^*(X)\}$. The planes $s_I = 0$ and $s_{X \setminus I} = 0$ are of course identical. We call a *cell* any open convex cone γ_λ into which $\mathbb{R}^{n-1}$ is thus divided and $\{\gamma_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ the family of these cones.

The reason for this notation is the following: any open convex cone γ_λ of the triangulation can be written:

$$\gamma_\lambda = \{s \in \mathbb{R}^{n-1} : \lambda(I)\, s_I > 0 \ \forall\, I \in \mathcal{P}^*(X)\}$$

where λ is a sign function defined on $\mathcal{P}^*(X)$ and taking its values on $\{-1, +1\}$ which satisfies certain compatibility conditions, namely

i) $\forall\, I \in \mathcal{P}^*(X) \quad \lambda(I) = -\lambda(X \setminus I)$,

ii) $\forall\, I, J \in \mathcal{P}^*(X)$ with $I \cap J = \emptyset$ and $\lambda(I) = \lambda(J)$, then $\lambda(I \cup J) = \lambda(I) = \lambda(J)$.

We are now in a position to describe the family of tubes inside which the n-point function $H^{(n)}$ is analytic. With every cell γ_λ let us associate indeed the following cone $\mathscr{C}_\lambda$ defined in $\mathbb{R}^{4(n-1)}$:

$$\mathscr{C}_\lambda = \{q \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : \lambda(I)\, q_I \in V^+,\ \forall I \in \mathscr{P}^*(X)\}.$$

Clearly $\mathscr{C}_\lambda$ is obtained from γ_λ by replacing all the conditions $\gtrless 0$ by the corresponding conditions $\in V^\pm$. But while the union of the closures of the cells γ_λ exhausts the whole space $\mathbb{R}^{n-1}$, nothing of this type occurs for the cones $\mathscr{C}_\lambda$ since the vectors q_I can never be space-like.

Then the n-point function $H^{(n)}$ is analytic inside the union of the family of tubes $\{\mathscr{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$, where $\mathscr{T}_\lambda$ denotes the tube in $\mathbb{C}^{4(n-1)}$ whose basis is the cone $\mathscr{C}_\lambda$, namely:

$$\mathscr{T}_\lambda = \{k \in \mathbb{C}^{4(n-1)} : \lambda(I)\, \mathrm{Im}\, k_I \in V^+,\ \forall I \in \mathscr{P}^*(X)\}$$

In order to study in detail the connections between all these tubes we shall introduce the various boundary values which $H^{(n)}(k)$ can take when k tends to a real value p inside any tube:

$$H_\lambda^{(n)}(p) = \lim_{k \to p,\ k \in \mathscr{T}_\lambda} H^{(n)}(k).$$

These boundary values (the so called Ruelle-Araki generalized retarded functions) have certain properties of coincidence (in the sense of distributions) that we are going to recall.

Definition 2. Two cells γ_{λ_1} and γ_{λ_2} (resp. two tubes $\mathscr{T}_{\lambda_1}$ and $\mathscr{T}_{\lambda_2}$) are called *adjacent* if there exists one partition $(I, X\backslash I)$ of X such that the indices λ_1 and λ_2 take the same value on any proper set of X but I and $X\backslash I$.

Namely

$$\lambda_1(I) = \lambda_2(X\backslash I) = -\lambda_2(I) = -\lambda_1(X\backslash I).$$

We shall say that the partition $(I, X\backslash I)$ *separates* the two cells (resp. tubes). In other words, the corresponding plane $s_I = s_{X\backslash I} = 0$ is a common $(n-2)$-dimensional face of the two cells γ_{λ_1} and γ_{λ_2}.

Let us then consider the boundary values $H_{\lambda_1}^{(n)}(p)$ and $H_{\lambda_2}^{(n)}(p)$ associated with two adjacent tubes $\mathscr{T}_{\lambda_1}$ and $\mathscr{T}_{\lambda_2}$, separated by a partition $(I, X\backslash I)$. It is a consequence of the spectral condition that these two distributions coincide on the real region $\mathscr{R}_I$ thus defined:

$$\mathscr{R}_I = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : p_I^2 \neq m_I^2,\ p_I^2 < M_I^2\}$$

where m_I is the discrete mass and M_I the threshold mass associated with the channel $(I, X\backslash I)$ by the spectral condition. That is

$$\forall p \in \mathscr{R}_I \qquad H_{\lambda_1}^{(n)}(p) = H_{\lambda_2}^{(n)}(p).$$

This fact ensures through the general edge of the wedge theorem [24] that $H^{(n)}$ is certainly analytic inside a small complex region $\mathcal{N}(\mathcal{R}_I)$ which connects the two tubes $\mathcal{T}_{\lambda_1}$ and $\mathcal{T}_{\lambda_2}$, and turns out to be the intersection of a complex neighbourhood of $\mathcal{R}_I$ with the convex hull of the union of the two given tubes. In the following, $\mathcal{R}_I$ will be called the "edge of the wedge region" of the two tubes.

A special role is played in this context by the real region $\mathcal{R} = \bigcap_{I \in \mathcal{P}^{**}(X)} \mathcal{R}_I$. Actually $\mathcal{R}$ is the region where all the distributions $H_\lambda^{(n)}(p)$ coincide. Therefore by applying the edge of the wedge theorem to any couple of opposite tubes, it is proved that $\mathcal{R}$ is a real region of analyticity.

2.2 The Steinmann Relations

Let us consider the set of the various boundary values $\{H_\lambda^{(n)}(p), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$. These distributions are linked by certain linear relations known under the general name of "Steinmann relations". In this section we intend to describe the main feature of this linear system, which will be used extensively in the following, namely the existence of a special class of Steinmann relations, the so called "quartet relations" which generate all the others[1].

Definition 3. Two partitions $(I, X\backslash I)$ and $(J, X\backslash J)$ are called *transverse* if $I \cap J \neq \emptyset$ and $I \cap (X\backslash J) \neq \emptyset$. If not they are called *incident* and we have either $I \subset J$ or $I \subset X\backslash J$.

Definition 4. We say that four cells $\{\gamma_{\lambda_i}, 1 \leqq i \leqq 4\}$ compose a *quartet* if there exist two *transverse* partitions $(I, X\backslash I)$ and $(J, X\backslash J)$ such that:

i) γ_{λ_1} and γ_{λ_2} (resp. γ_{λ_3} and γ_{λ_4}) are adjacent cells separated by the partition $(J, X\backslash J)$;

ii) γ_{λ_1} and γ_{λ_3} (resp. γ_{λ_2} and γ_{λ_4}) are adjacent cells separated by the partition $(I, X\backslash I)$.

Then we also use the denomination of quartet for the set of the four corresponding tubes $\{\mathcal{T}_{\lambda_i}, 1 \leqq i \leqq 4\}$.

In the following we shall always represent the four tubes which compose a quartet with the notation $\{\mathcal{T}_{\lambda_{++}}, \mathcal{T}_{\lambda_{-+}}, \mathcal{T}_{\lambda_{--}}, \mathcal{T}_{\lambda_{+-}}\}$ where the first index refers to the sign of the partial sum s_I, the second to the sign of s_J, and where λ stands for the common value of the various $\{\lambda_i, 1 \leqq i \leqq 4\}$ for other proper subsets of X.

Now the four boundary values of the n-point function occuring in each quartet $\{\mathcal{T}_{\lambda_{++}}, \mathcal{T}_{\lambda_{-+}}, \mathcal{T}_{\lambda_{--}}, \mathcal{T}_{\lambda_{+-}}\}$ satisfy the following relation, for all real arguments, in the sense of distributions:

$$H_{\lambda_{--}}^{(n)}(p) - H_{\lambda_{-+}}^{(n)}(p) - H_{\lambda_{+-}}^{(n)}(p) + H_{\lambda_{++}}^{(n)}(p)$$

[1] The proof of this property is a consequence of the analysis made by Ruelle [6] but has remained still unpublished [26]. A general proof in the framework of Bros [23] rather different from Ruelle's will be reported in a coming paper [27].

and the set of these *quartet relations* generates the whole set of Steinmann relations satisfied by the various boundary values $\{H_\lambda^{(n)}(p), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$.

2.3 The Ruelle Prescription

This prescription refers to the fact proved in Ref. [6] that the Fourier transform of the connected (or truncated) vacuum expectation value of the time-ordered product of n fields $\tilde{t}_c(p)$ coincides with the various distributions $H_\lambda^{(n)}(p)$ in relevant regions. More precisely let us consider the following family of open sets $\{\Omega_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ with

$$\Omega_\lambda = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : \text{[illegible]}\}.$$

Here $\bar{V}_I^{\pm}$ denotes the following closed set in $\mathbb{R}^4$:

$$\bar{V}_I^{+} = -\bar{V}_I^{-} = \{p \in \mathbb{R}^4 : p^0 \geq \text{[illegible]}\} \cup \{p \in \mathbb{R}^4 : p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_I^2}\}.$$

It is easy to see that the collection of all Ω_λ forms an open covering of the whole space $\mathbb{R}^{4(n-1)}$. Ruelle has proved:

$$\forall\, p \in \Omega_\lambda \qquad \tilde{t}_c(p) = H_\lambda^{(n)}(p)$$

that is, the connected time-ordered product is the boundary value of the n-point function according to a prescription (the so called "Ruelle prescription") which connects the tube inside which the boundary value is taken with the location of the real limit point.

More precisely:

$$\tilde{t}_c(p) = \lim_{\substack{k \to p \\ p \in \Omega_\lambda,\, q \in \text{[illegible]}}} H^{(n)}(k).$$

This is of course very important since in the L.S.Z. theory [3] the truncated time-ordered product is the fundamental object which allows to express the connected scattering amplitudes in terms of the fields. More precisely, we have the well known "reduction formulae" [3, 4]:

$$\langle p^I|S| - p^{X \setminus I} \text{[illegible]}.$$

Here $\langle p^I|S| - p^{X\setminus I}\rangle_c$ denotes the connected scattering amplitude describing the process $I \to X\setminus I$ and $\hat{\tilde{t}}_c(p)$ the connected *amputated* time-ordered product

$$\hat{\tilde{t}}_c(p) = \prod_{i \in X} (p_i^2 - m_i^2)\, \tilde{t}_c(p)$$

whose restriction to the relevant physical region

$$\mathcal{M}_I = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : p_i^2 = m_i^2 \;\; \forall\, i \in X,\; p_i \in V^- \;\; \forall\, i \in I,\; p_i \in V^+ \;\; \forall\, i \in X\setminus I\}$$

is meaningful in the sense of distributions on the mass shell [4, 12].

2.4 General n-Point Functions

In the following we shall meet functions enjoying all the analytic and algebraic properties of the n-point function stated above except the physical connection with products of n fields.

We shall call these functions *general n-point functions* in order to distinguish then from the "physical" one. More precisely we call general n-point function any function f defined on $\mathbb{C}^{4(n-1)}$ and enjoying the following properties:

i) analyticity and slow increase near the real inside the tube $\{\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$. The real boundary values $\{f_\lambda(p), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ are then distributions:

ii) Steinmann relations between the various real bondary values $\{f_\lambda(p), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$;

iii) coincidence relations between two adjacent boundary values $f_{\lambda_1}(p)$ and $f_{\lambda_2}(p)$ on a real region $\mathcal{R}_I$ thus defined:

$$\mathcal{R}_I = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : p_I^2 < M_I^2,\ p_I^2 \neq m_I^2\}$$

where m_I and M_I are now general positive numbers.

Moreover the Ruelle prescription allows to introduce the *t-boundary value* of the function f, denoted $f_t(p)$, by the following prescription:

$$f_t(p) = \lim_{\substack{k \to p \\ k \in \Omega_\lambda + a \in \mathcal{T}_\lambda}} f(k).$$

Of course the masses m_I and M_I which occur in the definition of Ω_λ are now those of Conditions iii). As in Section 2.3, such a definition makes sense: the collection of all Ω_λ forms an open covering of $\mathbb{R}^{4(n-1)}$ and it is easy to check that the intersection of any two open sets Ω_λ and $\Omega_{\lambda'}$, $\Omega_{\lambda'}$ lies in the coincidence region of $f_\lambda(p)$ and $f_{\lambda'}(p)$. Actually as seen in Section 2.3 the t-boundary value of the physical n-point function is nothing but the connected time-ordered product $\tilde{t}_c(p)$.

In this paper we shall always deal with *general* n-point functions. Moreover these functions will always be assumed to enjoy integrability properties at infinity in the set of all the Euclidean directions of the tubes $\{\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ [2]. This will be stated more precisely in the course of Section 4.6. Let us only notice that we shall not assume any regularity properties in real directions at infinity. In particular no use will be made of the possible temperate character of the boundary values.

[2] For applications to the non linear program [21], this will necessitate the use of an analytic regularization process, as already pointed out in [19].

3. Convolution Product Associated with a Graph: the Method

In this section we shall briefly describe the general method which will be used further. We first sketch the relevant terminology. Let us consider a *graph* G. Being given a vertex v and a line l, we say that v and l are *incident* if v is an endpoint of l. We call *external* those lines which are incident to one vertex only. The set of lines incident to a given vertex v is called the *star* of v and denoted $\mathscr{S}_v$. We avoid disconnected graphs because they reduce to the discussion of their connected components. Similarly we shall suppose that every vertex is incident to at least three lines. Simply connected graphs (or "trees") will play a special role in the following. We introduce the numbers

n: number of external lines of G,

l: number of independent loops of G.

The successive steps of the method are then the following:

i) With every line of G associate a complex four-vector so as to satisfy the energy-momentum conservation law at every vertex. Let $\{k_i, 1 \leqq i \leqq n\}$ be the n complex four-vectors thus associated with the *external* lines of G. It should be understood that, in order to satisfy the global conservation law $\sum_{i=1}^{n} k_i = 0$, it is necessary to associate opposite vectors with each of the two endpoints of every *internal* line of G.

ii) With every vertex v of G incident to n_v lines, associate a *general* n_v-point function of the relevant complex arguments.

iii) The external variables being held fixed in the n-point domain, define a prescription of integration on the four-vectors associated with the internal lines.

iv) Then study the algebraic and analytic properties of the object there obtained which we shall call *convolution product associated with the graph* G (shortly G-*product*) and denote $H^G(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

The aim of this paper is to prove that H^G is a general n-point function (in the sense of Section 2.4). In other words to prove that the primitive structure of the n-point functions is preserved by G-convolution. We shall use the following ideas:

i) Among all others, the case of simply connected graphs appears to be the easiest. This is because conservation laws at every internal vertex are sufficient to determine internal momenta once known the external ones so that the prescription of integration is trivial. Section 4 is devoted to this simple case.

ii) One is then led to define and study the G-product by recursion over the number l of independent loops of G. The case of trees is indeed the case $l = 0$ which initiates the recursion and it remains to prove the following property:

"Assume that for any graph G with $l \leqq l_0 - 1$ independent loops and any number n of external lines, it is possible to define a G-product which is a general n-point function.

Then, the same can be done for any graph with $l = l_0$ independent loops and any number of external lines."

This will be proved in Section 5.

4. The Case of Trees

4.1 Preliminary Remarks

Let us consider a tree T and denote $\{k_i, 1 \leqq i \leqq n\}$ the n four-vectors associated with its external lines. We shall first prove some simple properties.

Proposition 1. *With any internal line i of T it is possible to associate a partition $(I, X \setminus I)$ of the set $X = \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Proof. By "cutting" i, we get two subtrees T_1 and T_2. The complex four-vectors associated with the external lines of T_1 and T_2 are then $\{k_i, i \in I; -k_I\}$ for T_1 and $\{k_i, i \in X \setminus I; k_{X \setminus I}\}$ for T_2.

Proposition 2. *Let us consider a vertex v of T and denote $\mathscr{S}_v$ the set of lines l incident to v. Then it is possible to associate with v a partition $\{I(l, v), l \in \mathscr{S}_v\}$ of X.*

Proof. With every line $l \in \mathscr{S}_v$, we associate a subset $I(l, v)$ of X by the following rule:

— if l is an internal line of T, $I(l, v)$ is the subset of the associated partition (see above) $(I(l, v); X \setminus I(l, v))$ corresponding to the subtree which does not contain v.

— if l is an external line of T associated with the four-vector k_i, $I(l, v)$ is reduced to the set $\{i\}$.

Then it is easy to check that the collection $\{I(l, v), l \in \mathscr{S}_v\}$ forms a partition of X and that we have for any vertex v:

$$\sum_{l \in \mathscr{S}_v} k_{I(l,v)} = \sum_{i=1}^{n} k_i = 0 .$$

In other words, it is possible to associate with any line l of T incident to v a complex four-vector $k_{I(l,v)} = \sum_{j \in I} k_j$ and with any vertex v a general n_v-point function $H^{(n_v)}$ of the n_v arguments $\{k_{I(l,v)}, l \in \mathscr{S}_v\}$ linked by the relation $\sum_{l \in \mathscr{S}_v} k_{I(l,v)} = 0$.

Proposition 3. *Let us consider the family of tubes $\{\mathscr{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ defined in the space of the complex four-vectors $\{k_i, 1 \leqq i \leqq n\}$ linked by the*

relation $\sum_{i=1}^{n} k_i = 0$. *With any tube of this family and any vertex* v *of* T, *it is possible to associate a tube* $\mathscr{T}_{\lambda_v}$ *defined in the space of the complex four-vectors* $\{k_{I(l,v)}, l \in \mathscr{S}_v\}$ *linked by the relation* $\sum_{l \in \mathscr{S}_v} k_{I(l,v)} = 0$. *Moreover* $\mathscr{T}_\lambda$ *is contained in the intersection of the various* $\mathscr{T}_{\lambda_v}$.

Proof. $\mathscr{T}_{\lambda_v}$ is defined in $\mathbb{C}^{4(n_v-1)}$ by the restriction $\lambda_v \in \Lambda^{(n_v)}$ of the sign function λ to subsets of X which are unions of sets of the family $\{I(l, v), l \in \mathscr{S}_v\}$. Clearly $\mathscr{T}_\lambda \subset \bigcap_v \mathscr{T}_{\lambda_v}$.

We are now in a position to introduce the convolution product.

4.2 The Convolution Product Associated with T

Let us consider the family of functions $\{H_\lambda^T(k), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ thus defined:

$$H_\lambda^T(k) = \prod_v H_{\lambda_v}^{(n_v)}(\{k_{I(l,v)}, l \in \mathscr{S}_v\}) \prod_i [H^{(2)}(k_I)]^{-1}. \tag{1}$$

In this formula, the first product is taken over the *vertices* of T; $H_{\lambda_v}^{(n_v)}$ denotes the restriction of the general n_v-point function $H^{(n_v)}$ associated with v to the tube $\mathscr{T}_{\lambda_v}$ defined in $\mathbb{C}^{4(n_v-1)}$; its arguments are the n_v complex four-vectors $\{k_{I(l,v)}, l \in \mathscr{S}_v\}$. The second product is taken over the *internal lines* i of T; $(I, X \setminus I)$ denotes the partition of X associated with the line i; and $[H^{(2)}(k_I)]^{-1}$ the inverse of a general two-point function $H^{(2)}(k_I)$ associated with the line i. Had this factor been omitted, H_λ^T would have presented a double pole in the channel $(I, X \setminus I)$. The reason for its introduction is to recover a simple pole.

Remark. In fact for this purpose the choice $[H^{(2)}(k_I)]^{-1} \equiv (k_I^2 - m_I^2)$ would have been sufficient. However in the context of the non-linear program [21], the use of a *complete* propagator appears necessary. Then the possible occurence of C.D.D. poles [18] (i.e. zeros of $H^{(2)}$) leads us to assume that each completely "amputated" n_v-point function

$$\hat{H}^{(n_v)}(k_1, \ldots, k_{n_v}) = \prod_{j=1}^{n_v} [H^{(2)}(k_{I_j})]^{-1} H^{(n_v)}(k_1, \ldots, k_{n_v})$$

is analytic in the n_v-point primitive domain. In other words we assume that the possible C.D.D. poles are cancelled by corresponding zeros of $H^{(n_v)}$.

Proposition 4. H_λ^T *is analytic inside the tube* $\mathscr{T}_\lambda$.

Proof. Since each $H_{\lambda_v}^{(n_v)}$ is analytic inside the tube $\mathscr{T}_{\lambda_v}$, their product H_λ^T is analytic inside the intersection $\bigcap_v \mathscr{T}_{\lambda_v}$, which contains $\mathscr{T}_\lambda$ as shown in Proposition 3.

4.3 *Proof of Steinmann Relations*

Let us consider the set of the various real boundary values $\{H_\lambda^T(p), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$. We recall that in order to check they satisfy the Steinmann relations, it is enough to concentrate on the so called "quartet relations" introduced in Section 2.2:

$$H_{\lambda^{+-}}^{I}(p) + H_{\lambda^{--}}^{T}(p) = H_{\lambda^{++}}^{T}(p) + H_{\lambda^{-+}}^{I}(p)$$

which must be satisfied in the sense of distributions by the four boundary values occuring in any quartet of tubes $\{\mathcal{T}_{\lambda^{++}}, \mathcal{T}_{\lambda^{-+}}, \mathcal{T}_{\lambda^{--}}, \mathcal{T}_{\lambda^{-+}}\}$.

We shall need the following

Definition 5. Let us consider a partition $(I, X\backslash I)$. We shall say that it is a *vertex partition* for T if there exist a vertex v_0 of T and a partition $(\mathcal{I}, \mathcal{S}_{v_0}\backslash\mathcal{I})$ of its star $\mathcal{S}_{v_0}$ such that

$$I = \bigcup_{l \in \mathcal{I}} I(l, v_0)$$

where $I(l, v_0)$ is associated with the line l as indicated in Proposition 2. If so, we shall say that $(I, X\backslash I)$ is *connected* with v_0.

The reasons for which this definition is needed are the following. Let us consider two adjacent cells γ_{λ_1} and γ_{λ_2} separated by a partition $(I, X\backslash I)$. At any vertex v of T the two sign functions λ_1 and λ_2 define relevant restrictions $\lambda_{1,v}$ and $\lambda_{2,v}$. It is easily checked that if $(I, X\backslash I)$ *is not* a vertex partition for T, then λ_1 and λ_2 define the same restriction at any vertex v of T, that is: $\lambda_{1,v} = \lambda_{2,v}$. Similarly, if $(I, X\backslash I)$ *is* a vertex partition for T connected with the vertex v_0, then it is easily checked that λ_1 and λ_2 define the same restriction at any vertex v *but* v_0. This point is the basis of much that follows in this section. It should be thoroughly understood. Now we have the following algebraic lemma:

Lemma 1. *If two partitions $(I, X\backslash I)$ and $(J, X\backslash J)$ are transverse vertex partitions, they are connected with the same vertex v_0. Moreover there exist two partitions $(\mathcal{I}, \mathcal{S}_{v_0}\backslash\mathcal{I})$ and $(\mathcal{J}, \mathcal{S}_{v_0}\backslash\mathcal{J})$ of its star $\mathcal{S}_{v_0}$ which satisfy the following conditions:*

i) $I = \bigcup_{l \in \mathcal{I}} I(l, v_0)$ *and* $J = \bigcup_{l \in \mathcal{J}} I(l, v_0)$.

ii) $(\mathcal{I}, \mathcal{S}_{v_0}\backslash\mathcal{I})$ *and* $(\mathcal{J}, \mathcal{S}_{v_0}\backslash\mathcal{J})$ *are transverse in* $\mathcal{S}_{v_0}$.

Proof. We remark that if $(I, X\backslash I)$ and $(J, X\backslash J)$ were connected with two different vertices of T, they would be necessarily *incident* (in the sense of Definition 3). This point is sufficient to conclude.

Now we are in a position to prove

Proposition 5. *The four boundary values occurring in any quartet of tubes $\{\mathcal{T}_{\lambda^{++}}, \mathcal{T}_{\lambda^{+-}}, \mathcal{T}_{\lambda^{--}}, \mathcal{T}_{\lambda^{-+}}\}$ satisfy the following relation for all real*

arguments, in the sense of distributions:

$$H^T_{\lambda_{++}}(p) + H^T_{\lambda_{--}}(p) = H^T_{\lambda_{+-}}(p) + H^T_{\lambda_{-+}}(p)\,. \tag{2}$$

Proof. In view of the analysis made above, we have to distinguish two different cases:

i) At least one of the two partitions which define the quartet is not a vertex partition for T, for example the one that corresponds to the second index.

As already noticed, λ_{++} and λ_{+-} (resp. λ_{-+} and λ_{--}) then define the same restriction at any vertex v of T and we have for all real arguments:

$$H^T_{\lambda_{++}}(p) = H^T_{\lambda_{+-}}(p) \quad \text{and} \quad H^T_{\lambda_{-+}}(p) = H^T_{\lambda_{--}}(p)$$

which proves relation (2) to be trivially satisfied.

ii) Both partitions are vertex partitions for T.

Since they are transverse partitions, we apply Lemma 1 and conclude that they are connected with the same vertex v_0. It is then easily checked that the four sign functions $\{\lambda_{++}, \lambda_{+-}, \lambda_{--}, \lambda_{-+}\}$ define the same restriction at any vertex v of T *but* v_0. We denote $\{\lambda_{++,v_0}, \lambda_{+-,v_0}, \lambda_{--,v_0}, \lambda_{-+,v_0}\}$ the four different restrictions at this vertex. Then we can apply the second part of Lemma 1, which asserts that the four tubes $\{\mathscr{T}_{\lambda_{++,v_0}}, \mathscr{T}_{\lambda_{+-,v_0}}, \mathscr{T}_{\lambda_{--,v_0}}, \mathscr{T}_{\lambda_{-+,v_0}}\}$ constitute a quartet in the space of the complex four-vectors $\{k_{I(l,v_0)}, l \in \mathscr{S}_{v_0}\}$. As the function $H^{(n_{v_0})}$ associated with the vertex v_0 is a general n_{v_0}-point function, its four boundary values satisfy a quartet relation. Then it is enough to multiply all the terms of this relation by the common factors coming from the other vertices of T, to get the announced result.

4.4 *Proof of Coincidence Relations*

Proposition 6. *Let us consider the boundary values $H^T_{\lambda_1}(p)$ and $H^T_{\lambda_2}(p)$ associated with two adjacent tubes $\mathscr{T}_{\lambda_1}$ and $\mathscr{T}_{\lambda_2}$ separated by a partition $(I, X\backslash I)$. Then these two distributions coincide on a real region:*

$$\mathscr{R}_I = \{p \in \mathbb{R}^{4n} : \tilde{m}_I^2 \geqslant \tilde{M}_I^2\}$$

where $\tilde{m}_I$ and $\tilde{M}_I$ are certain masses associated with the channel $(I, X\backslash I)$.

Proof. We have to distinguish two different cases:

i) The partition $(I, X\backslash I)$ is not a vertex partition for T. Then we have already noticed that λ_1 and λ_2 define the same restriction at any vertex v, and therefore the coincidence relation $H^T_{\lambda_1}(p) = H^T_{\lambda_2}(p)$ is satisfied for *all* real arguments.

ii) The partition $(I, X \setminus I)$ is a vertex partition for T connected with one vertex v_0. Then, as already mentioned, λ_1 and λ_2 define the same restriction at any vertex v *but* v_0. We denote λ_{1,v_0} and λ_{2,v_0} the two different restrictions at this vertex. As the function $H^{(n_{v_0})}$ associated with the vertex v_0 is a general n_{v_0}-point function, its two boundary values $H^{(n_{v_0})}_{\lambda_1, v_0}$ and $H^{(n_{v_0})}_{\lambda_2, v_0}$ coincide on $\mathscr{R}_I$. Multiplying this coincidence relation by the common factors coming from the other vertices of T is then sufficient to conclude.

Remark. A special case may occur when the partition $(I, X \setminus I)$ is connected with *two* vertices: $(I, X \setminus I)$ is then associated with an internal line i of T (see Proposition 1) and connected with the two endpoints of i. In that case, the proof follows closely the previous one and will be left to the reader.

Now putting together Propositions 4–6 and applying the general edge of the wedge theorem, we finally obtain:

Theorem 1. *The convolution product associated with any simply connected graph with n external lines is a general n-point function.*

4.5 Additional Remark

As a final remark let us point out that the convolution product associated with a tree T is analytic in a domain larger than the "primitive domain" of the physical n-point function. Indeed it is a direct consequence of Proposition 4 that its "natural" faces are only those *corresponding to the vertex partitions.*

This point will be made clearer through the following example. We consider the convolution product associated with

and we represent on the "Steinmann sphere" [5, 10] the traces of the various faces for this general four-point function. Fig. 1 shows the situation on the hemisphere $s_1 > 0$; the case of the physical four-point function is also drawn for comparison.

4.6 Bounds in the Tubes

Let us now state in a more precise way than in Section 2.5 the bounds which we shall assume for any vertex function $H^{(n_v)}$ in its primitive n_v-point domain of analyticity $\mathscr{D}^{(n_v)}$. We introduce the completely "amputated" n_v-point function

$$\hat{H}^{(n_v)}(k_1, \ldots, k_{n_v}) = \prod_{i=1}^{n_v} [H^{(2)}(k_i)]^{-1} H^{(n_v)}(k_1, \ldots, k_{n_v}).$$

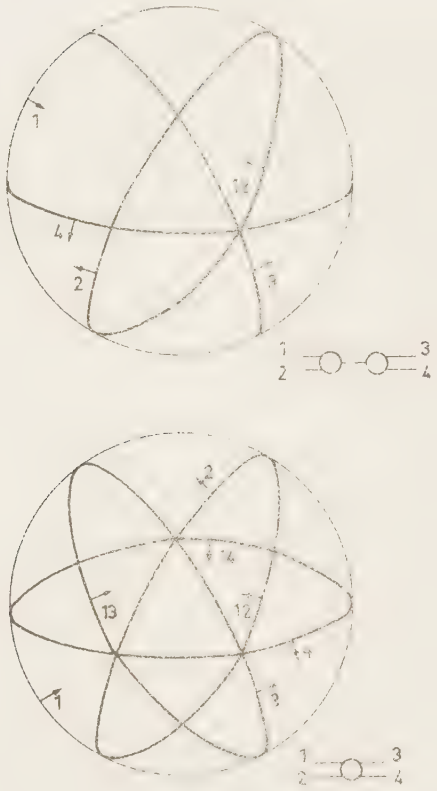


FIG. 1

Then we assume the following bounds inside the tubes:

$$|\hat{H}^{(n_v)}(k_v)| \leqq C_K \left(1 + \frac{1}{d_{\hat{e}}(k_v, \partial \mathscr{D}^{(n_v)})}\right)^{M_v} \quad \text{for} \quad n_v > 2 \tag{3a}$$

$$|H^{(2)}(k)| \leqq \frac{C_L}{1 + [(q^0)^2 + p^2]^{\eta}} \quad \text{with} \quad \eta > 0 . \tag{3b}$$

Here $k_v = p_v + iq_v$ stands for the n_v complex four-vectors $\{k_j, 1 \leqq j \leqq n_v\}$; a time direction $\hat{e}$ has been chosen as a coordinate axis, which allows to write $k_v = (\boldsymbol{k}_v, k_v^0) = (\boldsymbol{p}_v + i\boldsymbol{q}_v, p_v^0 + iq_v^0)$; $d_{\hat{e}}(k_v, \partial \mathscr{D}^{(n_v)})$ denotes the Euclidean distance of the point k_v to the boundary of $\mathscr{D}^{(n_v)}$; C_K (resp. C_L) is a positive constant which depends of a compact set K (resp. L) in p_v^0-space (resp. p^0-space); the integer M_v indicates the order of the distribution which is the boundary value of $\hat{H}^{(n_v)}$.

As a direct consequence of (3a) and (3b), we have

$$|H^{(n_v)}(k_v)| \leqq C'_K \prod_{i=1}^{n_v} \frac{1}{1+[(q_i^0)^2+\boldsymbol{p}_i^2]^{2+\eta}} \left(1+\frac{1}{d_{\hat{e}}(k_v, \partial \mathscr{D}^{(n_v)})}\right)^{M_v}. \tag{3c}$$

Now under these assumptions it is easily checked that the convolution product H^T satisfies similar bounds, namely:

$$|H^T(k)| \leqq L_K \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+[(q_i^0)^2+\boldsymbol{p}_i^2]^{2+\eta}} \left(1+\frac{1}{d_{\hat{e}}(k, \partial \mathscr{D}^{(n)})}\right)^{M}.$$

In the following such bounds will be needed to ensure integrability at infinity on the set of all *Euclidean directions* defined as follows

$$k = (\varrho \boldsymbol{p}, p^0 + i\varrho q^0)$$

with $\varrho \to +\infty$ and q^0 chosen in any cell of the family $\{\gamma_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$.

5. The General Case

In this section we intend to prove the following property: "Assume that for any graph $\tilde{G}$ with $l \leqq l_0 - 1$ and n arbitrary, it is possible to define a $\tilde{G}$-product which is a general n-point function. Then the same can be done for any graph with $l = l_0$ and n arbitrary". We shall use the following ideas:

i) With every graph G with l_0 independent loops and n external lines, we can associate a graph with $(l_0 - 1)$ independent loops and $(n+2)$ external lines which we call an *antecedent* of G. This is easily done by "cutting" any internal line of G. Of course such a process is not unique and G admits a finite number of antecedents. In the following we choose one of these which we denote $\tilde{G}$.

ii) Now it is possible to apply the recursion hypothesis to $\tilde{G}$ and to define a $\tilde{G}$-product $H^{\tilde{G}}$ which is a general $(n+2)$-point function, defined on the space $\mathbb{C}^{4(n+1)}$ of the $(n+2)$ complex four-vectors $\{k_i, 1 \leqq i \leqq n+2\}$ linked by the relation $\sum_{i=1}^{n+2} k_i = 0$.

iii) Then we define the convolution product associated with G by the following rule:

$$H^G(k) = \int_{\Gamma_k} H^{\tilde{G}}(k, k_{n+1}, k_{n+2}) \Big|_{k_{n+1}+k_{n+2}=t} [H^{(2)}(t)]^{-1}\, dt\,. \tag{4}$$

Here k stands for the n complex four-vectors $\{k_i, 1 \leqq i \leqq n\}$ linked by the relation $\sum_{i=1}^{n} k_i = 0$; $t = u + iv$ varies in the space $\mathbb{C}^4$ of one complex four-vector; Γ_k is a four real dimensional integration region in this space,

whose infinite part belongs to the set of the Euclidean directions and which will be defined further. The integrability assumptions made at the end of Section 2.5 are then sufficient to ensure convergence at infinity. $[H^{(2)}(t)]^{-1}$ denotes the inverse of a general two-point function $H^{(2)}(t)$ which is introduced under the same assumptions that in Section 4.2.

Finally let us remark that in the integral (4) $H^{\tilde{G}}$ is restricted to a region of the analytic hyperplane $k_{n+1}+k_{n+2}=0$ which lies on the edge of the $(n+2)$-point configuration. Analyticity of $H^{\tilde{G}}$ in this region will then result from a local procedure of analytic completion which will be made in the second part of this section.

Then the proof will go in three steps:

1) We shall first introduce the convolution product at points k lying on a certain submanifold $V_{\hat{e}}$ in $\mathbb{C}^{4(n-1)}$ associated with a chosen time direction $\hat{e}$. We shall define a contour $\Gamma_{\hat{e},k}$ such as the integral (4) $H_{\hat{e}}^{G}(k)$ will be shown to have certain analytic and algebraic properties.

2) In a second step, we shall move $\hat{e}$ in the light cone and the various $H_{\hat{e}}^{G}$ will appear as pieces of a unique analytic function H^{G}. Putting together the analytic and algebraic properties of every $H_{\hat{e}}^{G}$ will yield for H^{G} the relevant structure of a general n-point function.

3) Finally it will be necessary to check that H^{G} is independent from the original choice of an antecedent $\tilde{G}$ and this will achieve the proof of the recursion property.

5.1 Choice of a Time Direction

Let us make choice of a time direction $\hat{e}\in V^{+}$ and therefore of a coordinate system in $\mathbb{R}^4$. We write:

$$\forall\, 1\leqq i\leqq n \qquad k_i=p_i+iq_i=(k_i^0,\vec{k}_i)=(p_i^0+iq_i^0,\vec{p}_i+i\vec{q}_i)$$

and

$$l=u+iv=(l^0,\vec{l})=(u^0+iv^0,\vec{u}+i\vec{v})\,.$$

We introduce the following submanifold in $\mathbb{C}^{4(n-1)}$:

$$V_{\hat{e}}=\{k\in\mathbb{C}^{4(n-1)}:\vec{q}_i=0,\ 1\leqq i\leqq n\}$$

and consider the traces of the family of tubes $\{\mathcal{T}_\lambda,\lambda\in\Lambda^{(n)}\}$ on this manifold, namely the family of "flat" tubes $\{\mathcal{T}_\lambda\cap V_{\hat{e}},\lambda\in\Lambda^{(n)}\}$. Whereas the union of the closures of the tubes $\mathcal{T}_\lambda$ is indeed very far from exhausting the whole of $\mathbb{C}^{4(n-1)}$, it is not difficult to check that the union of the closures of the various $\mathcal{T}_\lambda\cap V_{\hat{e}}$ exhaust the whole of $V_{\hat{e}}$. This comes from the fact that for any point k on $V_{\hat{e}}$, any of the partial sums $\{q_I,I\in\mathscr{P}^*(X)\}$ lies along the time direction $\hat{e}$. The various conditions $q_I\in V^{\pm}$ then become $q_I^0\gtrless 0$ and we can write

$$\mathcal{T}_\lambda\cap V_{\hat{e}}=\{k\in\mathbb{C}^{4(n-1)}:\operatorname{Im}\vec{k}=0,\ \operatorname{Im}k^0\in C_\lambda\}\,.$$

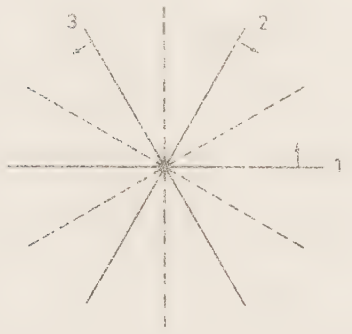


FIG. 2

Now the property already stated $\bigcup_{\gamma_\lambda \in \Gamma^{(n)}} \bar{\gamma}_\lambda = \mathbb{R}^{(n-1)}$ allows to conclude.

In the following we shall first try to define the G-product H^G at points which lie on $V_{\hat{e}}$, more precisely at points inside any flat tube $\mathcal{T}_\lambda \cap V_{\hat{e}}$. We shall need some definitions.

Definition 6. Let us consider the "triangulation" of the space $\mathbb{R}^{n-1}$ of the variable $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ with $\sum_{i=1}^{n} s_i = 0$ by the following planes $\{s_I = 0, I \in \mathscr{P}^*(X)\}$ *and* $\{s_I = s_J; I, J \in \mathscr{P}^*(X)\}$. Clearly a lot of these planes are identical. We call a *pseudocell* any open convex cone σ_μ into which $\mathbb{R}^{n-1}$ is thus divided and $\{\sigma_\mu, \mu \in \Theta^{(n)}\}$ the complete family of these cones.

Of course a cell γ_λ is in general the union of several pseudocells since we have introduced new planes in the configuration. This is quite clear in the case $n = 3$ showed in Fig. 2. New planes there involved are drawn in dotted lines.

With every pseudocell σ_μ we associate the following flat tube in $V_{\hat{e}}$:

$$S_\mu = \{k \in \mathbb{C}^{4(n-1)} : \operatorname{Im} k = 0, \operatorname{Im} k' \in \sigma_\mu\} .$$

Clearly the union of the closures $\{\bar{S}_\mu, \mu \in \Theta^{(n)}\}$ exhausts the whole of $V_{\hat{e}}$.

Now in order to define the G-product at points which lie on $V_{\hat{e}}$, two steps are needed:

i) First for any flat tube S_μ of the family $\{S_\mu, \mu \in \Theta^{(n)}\}$ define a function $H^G_{\hat{e},\mu}$ analytic inside S_μ.

ii) Then consider the various S_μ included in a given $\mathcal{T}_\lambda \cap V_{\hat{e}}$ and prove that the corresponding functions $H^G_{\hat{e},\mu}$ are pieces of a unique function $H^G_{\hat{e},\lambda}$ analytic inside the flat tube $\mathcal{T}_\lambda \cap V_{\hat{e}}$.

Actually, as it will appear further, these two steps are made necessary by the analytic structure of the restriction of $H^{\tilde{G}}$ to the hyperplane $k_{n+1}+k_{n+2}=0$, which we shall study now.

5.2 *Analyticity Properties and Bounds for the Integrand*

In this section we shall study the analyticity properties of the restriction of $H^{\tilde{G}}$ to the analytic hyperplane

$$\pi = \{(k, k_{n+1}, k_{n+2}) \in \mathbb{C}^{4n} \times \mathbb{C}^2 : k_{n+1} + k_{n+2} = 0\}.$$

Clearly any point of π can be uniquely represented by the point (k, t) chosen in $\mathbb{C}^{4n}$ such as $t = k_{n+1} = -k_{n+2}$.

In the following we shall thus denote $H_\pi^{\tilde{G}}(k, t)$ the restriction to π of the $\tilde{G}$-product $H^{\tilde{G}}$. We shall need the following lemma of analytic completion.

Lemma 2. *A general n-point function f is analytic at all the boundary points of the tubes $\{\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ which do not belong to the union of the family of sets $\{\Delta_I, I \in \mathcal{P}^*(X)\}$ with*

$$\Delta_I = \Delta_{X\setminus I} = \{k \in \mathbb{C}^{4(n-1)} : k_I^2 = m_I^2\} \cup \{k \in \mathbb{C}^{4(n-1)} : k_I^2 = M_I^2 + q, q \geqq 0\}$$

where m_I and M_I are the masses associated with the partition $(I, X\setminus I)$ by coincidence relations

The proof of this basic lemma uses the special continuity theorem of Bremermann [10, 28] and will be fully given in another forthcoming paper [27]. Then we are in a position to prove

Proposition 7. *$H_\pi^{\tilde{G}}$ is analytic at all the points (k, t) of π which are boundary points of the tubes $\{\mathcal{T}_\beta, \beta \in \Lambda^{(n+2)}\}$ and do not belong to the union Σ of the following sets:*

$$\Xi_I = \{(k, t) \in \pi : k_I^2 = m_I^2\} \cup \{(k, t) \in \pi : k_I^2 = M_I^2 + q, q \geqq 0\} \quad \forall I \in \mathcal{P}^*(X)$$

$$\Sigma_I = \{(k, t) \in \pi : (k_I - t)^2 = m_I^2\} \cup \{(k, t) \in \pi : (k_I - t)^2 = M_I^2 + q, q \geqq 0\}$$

$$\forall I \in \mathcal{P}^*(X)$$

$$\Sigma_0 = \{(k, t) \in \pi : t^2 = m^2\} \cup \{(k, t) \in \pi : t^2 = M^2 + q, q \geqq 0\}$$

where X stands for the set $\{1, 2, \ldots, n\}$ of indices numbering the external lines of G.

Proof. This is a straightforward consequence of Lemma 2 applied to the $(n+2)$-point function $H^{\tilde{G}}$ on the face $q_{n+1}+q_{n+2}=0$, with an appropriate specialization of the notations for the masses.

Now we introduce the following submanifold in π:

$$W_{\hat{e}} = \{(k,t) \in \pi : q_i = 0,\ 1 \leqq i \leqq n;\ v = 0\}$$

and we study the domain of analyticity of $H_\pi^{\tilde{G}}$ inside this manifold.

We shall prove:

Proposition 8. *$H_\pi^{\tilde{G}}$ is analytic in the variables $\{t^0; k_i^0, 1 \leqq i \leqq n\}$ at all the points of $W_{\hat{e}}$ which do not belong to Σ.*

Proof. This is a trivial consequence of Proposition 7 since any point lying inside $W_{\hat{e}}$ is a boundary point of the tubes $\{\mathscr{T}_\beta, \beta \in \Lambda^{(n+2)}\}$.

Let us now state the bounds which are assumed to hold for $H^{\tilde{G}}$ (in view of the recursion hypothesis) in its primitive $(n+2)$-point domain of analyticity $\mathscr{D}^{(n+2)}$, namely:

$$|H^{\tilde{G}}(\underline{k})| \leqq C_K \prod_{j=1}^{n+2} \frac{1}{1 + [(q_j^0)^2 + \mathbf{p}_j^2]^{2+\eta}} \left(1 + \frac{1}{d_{\hat{e}}(\underline{k}, \partial \mathscr{D}^{(n+2)})}\right)^M . \tag{5}$$

Here $\underline{k} = \underline{p} + i\underline{q}$ stands for the $(n+2)$ complex four-vectors $\{k_i, 1 \leqq i \leqq n+2\}$ and the other notations are similar to those already used in Section 4.6. This bound ensures the integrability of $H^{\tilde{G}}$ at infinity in the set of all Euclidean directions $\underline{k} = (\varrho \underline{p}, \underline{p}^0 + i\varrho \underline{q}^0)$, with $\varrho \to +\infty$ and $\underline{q}^0$ chosen in any $(n+2)$-cell of the family $\{\gamma_\beta, \beta \in \Lambda^{(n+2)}\}$.

The following proposition will show that $H_\pi^{\tilde{G}}$ satisfies similar bounds.

Proposition 9. *Under the above assumptions we have*

$$|H_\pi^{\tilde{G}}(k,t)| \leqq C_K' \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 + [(q_j^0)^2 + \mathbf{p}_j^2]^{2+\eta}} \frac{1}{1 + [(t^0)^2 + \mathbf{u}^2]^{4+2\eta}} \cdot \left(1 + \frac{1}{d[(k,t); \Sigma]}\right)^M . \tag{6}$$

Proof. We represent $\underline{k}^0$ by the variables (k^0, t, ξ) with $k^0 = \{k_i^0, 1 \leqq i \leqq n\}$, $t = k_{n+1}^0$, $\xi = k_{n+1}^0 + k_{n+2}^0$. For fixed (k^0, t) we make the following argument in the complex ξ-plane: in view of Lemma 2, $H^{\tilde{G}}(\xi)$ is analytic inside a cut neighbourhood of the real. Moreover $H_\pi^{\tilde{G}}$ is nothing but the restriction $H^{\tilde{G}}(\xi = 0)$. Then let us choose a contour γ inside the analyticity domain of $H^{\tilde{G}}(\xi)$, enclosing the origin and containing each of the two endpoints of the cuts. In view of (5) one can show that the following bound holds for $H^{\tilde{G}}$ at any point chosen on γ:

$$|H^{\tilde{G}}(\xi)| \leqq \frac{D}{(\xi^2 - \mu^2)^N}$$

with D the right-hand side of (6).

Now inside γ, $\log|H^{\tilde{G}}(\xi)|$ is certainly bounded by the harmonic function $\log \frac{D}{|\xi^2-\mu^2|^N}$ and the bound (6) follows for the restriction $H_\pi^{\tilde{G}} = H^{\tilde{G}}(\xi = 0)$.

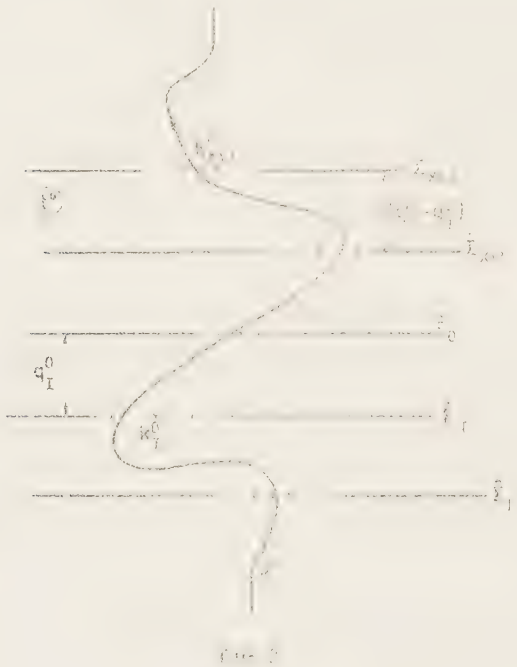
Now let us describe the analyticity domain of $H_\pi^{\tilde{G}}$ by its sections in the complex variable t^0 when k is held fixed outside the union of the family of sets $\{\Xi_I,\ I \in \mathscr{P}^*(X)\}$ introduced by Proposition 7 and $\boldsymbol{t}$ is fixed real and arbitrary.

Proposition 10. *$H_\pi^{\tilde{G}}$ is analytic at all the points of the complex plane t^0 which do not belong to the union $\hat{\Sigma}$ of the following "cuts":*

$$\hat{\Sigma}_0 = \{t^0 \in \mathbb{C} : t^{0\,2} = \boldsymbol{t}^2 + m^2 + \varrho,\ \varrho \geqq 0\}$$

$$\hat{\Sigma}_I = \{t^0 \in \mathbb{C} : (t^0 - k_I^0)^2 = (\boldsymbol{t} - \boldsymbol{p}_I)^2 + m_I^2 + \varrho,\ \varrho \geqq 0\} \quad \forall I \in \mathscr{P}^*(X)\,.$$

Proof. Clearly $\hat{\Sigma}_0$ (resp. $\hat{\Sigma}_I$) is the trace on the complex plane t^0 of the set Σ_0 (resp. Σ_I) introduced by Proposition 7. Then, since k does not belong to the union of the sets $\{\Xi_I, I \in \mathscr{P}^*(X)\}$, it is sufficient to apply Proposition 8 to conclude.



Such a situation is partially pictured on Fig. 3 which shows the cut $\hat{\Sigma}_0$ and two typical couples $(\hat{\Sigma}_I, \hat{\Sigma}_{X\setminus I})$. We remark that $\hat{\Sigma}_0$ (resp. $\hat{\Sigma}_I$) is symmetrical with respect to the origin (resp. the point $t^0 = k_I^0$) and that $\hat{\Sigma}_I$ and $\hat{\Sigma}_{X\setminus I}$ are symmetrical sets with respect to the origin.

Then it is easy to check that any line $\mathscr{L}$ passing through the origin and each of the points $\{k_I^0, I \in \mathscr{P}^*(X)\}$ with a slope always different from zero lies inside the t^0-section of the domain of analyticity of $H_\pi^{\tilde{G}}$ if the following conditions are fulfilled:

i) None of the cuts $\hat{\Sigma}_I$ should be confused with $\hat{\Sigma}_0$, that is

$$\forall\, I \in \mathscr{P}^*(X) \qquad q_I^0 \neq 0\,.$$

ii) None of the cuts $\hat{\Sigma}_I$ should be confused with one another, that is

$$\forall\, I, J \in \mathscr{P}^*(X) \qquad q_I^0 \neq q_J^0\,.$$

Should these conditions on the external variable be unsatisfied, the domain of $H_\pi^{\tilde{G}}$ in the t^0 plane would become disconnected and the line $\mathscr{L}$ would get pinched. This analysis is the basis of much that follows and should be thoroughly understood.

5.3 The G-Product

Proposition 11. *With any point k inside a flat tube S_μ of the family $\{S_\mu,\ \mu \in \Theta^{(n)}\}$ it is possible to associate a four real dimensional region $\Gamma_{\hat{e},k}$ in $\mathbb{C}^4$ such that the function*

$$H_{\hat{e},\mu}^{\tilde{G}}(k) = \int_{\Gamma_{\hat{e},k}} H_\pi^{\tilde{G}}(k,t)\,[\tilde{H}^{(2)}(t)]^{-1}\,dt \tag{7}$$

is analytic inside a neighbourhood of S_μ.

Proof. Since k belongs to S_μ all the conditions stated at the end of the previous section are fulfilled. Then any line $\mathscr{L}_k$ passing through the origin and each of the points $\{k_I^0, I \in \mathscr{P}^*(X)\}$ lies inside the analyticity domain of $H_\pi^{\tilde{G}}$ in t^0. So we choose the contour $\Gamma_{\hat{e},k}$ as $\mathbb{R}^3 \times \mathscr{L}_k$. Moreover we choose $\mathscr{L}_k$ with its infinite parts *parallel* with the imaginary axis so as to make (7) convergent at infinity (see Proposition 9).

Now we can release the constraint that $\mathscr{L}_k$ should contain the origin and the various points $\{k_I^0, I \in \mathscr{P}^*(X)\}$ and only require that these points be sufficiently close to $\mathscr{L}_k$ so that $\mathscr{L}_k$ does not intersect the cuts.

Since we work with strictly positive masses, this is allowed independently of the real part p and this moderate freedom which we have to shift $\mathscr{L}_k$ is sufficient to get analyticity inside a neighbourhood of S_μ.

Proposition 12. *Inside S_μ, $H^G_{\hat{e},\mu}$ satisfies the bound:*

$$|H^G_{\hat{e},\mu}(k)| \leqq L_K \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+[(q_i^0)^2+p_i^2]^{2+\eta}} \left(1+\frac{1}{d(q^0,\partial\sigma_\mu)}\right)^M \tag{8}$$

with L_K some positive constant which depends of a compact set K in p^0-space and $d(q^0,\partial\sigma_\mu)$ the Euclidean distance in $\mathbb{R}^{n-1}$ of the point q^0 to the boundary of the pseudocell σ_μ. This bound ensures integrability of $H^G_{\hat{e},\mu}$ in Euclidean directions. Moreover the order of increase M is the same that for $H^{\tilde{G}}$.

Proof. We start from the bound (6) which can be rewritten:

$$|H^{\tilde{G}}_{\pi}(k,t)\,[H^{(2)}(t)]^{-1}| \leqq L_{\tilde{K}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1+[(q_j^0)^2+p_j^2]^{2+\eta}} \cdot \frac{1}{1+[(v^0)^2+u^2]^{2+\eta}} \cdot \left(1+\frac{1}{d(q^0,\partial\sigma_\mu)}\right)^M$$

Now the integral on $\Gamma_{\hat{e},k}$ of the term $[(v^0)^2+u^2]^{-(2+\eta)}$ is certainly convergent. Moreover it is possible to choose the compact set $\tilde{K}$ as a product $K\times[-a,+a]$ in (p^0,u^0)-space. Then in order to prove (8) it is sufficient to check that for any t on $\Gamma_{\hat{e},k}$ we have the following inequality:

$$d[(k,t);\Sigma] \geqq C_1\, d(q^0,\partial\sigma_\mu) \tag{9}$$

with C_1 some positive constant.

This will be seen as follows. First we notice that in view of the equivalence of distances in $W_{\hat{e}}$, we have

$$d[(k,t);\Sigma] \geqq C_2 \inf[d(q^0,\partial\sigma_\mu), d(t^0,\hat{\Sigma})]$$

with C_2 some positive constant and $d(t^0,\Sigma)$ the Euclidean distance in $\mathbb{C}$ of the point t^0 to the union of the cuts $\hat{\Sigma}$.

Now since the complex line $\mathscr{L}_k$ can always be chosen to lie at a finite distance of the cuts (and this is easily checked), there exists a positive constant C_3 such as

$$d(t^0,\hat{\Sigma}) \geqq C_3 \inf_{I,J\in\mathscr{P}^*(X)} \{|q_I^0|, |q_I^0 - q_J^0|\}\ .$$

But this last term is exactly $d(q^0,\partial\sigma_\mu)$ and the inequality (9) is proved.

Now let us consider a given cell γ_λ and the family $\{\sigma_\mu, \mu\in M_\lambda\}$ of the pseudocells included in γ_λ. In any flat tube S_μ of the family $\{S_\mu, \mu\in M_\lambda\}$ a function $H^G_{\hat{e},\mu}$ analytic inside a neighbourhood of S_μ has been introduced. We have the following

Proposition 13. *The functions $\{H^G_{\hat{e},\mu}, \mu\in M_\lambda\}$ are pieces of a unique function $H^G_{\hat{e},\lambda}$ which is analytic inside a neighbourhood $\mathscr{D}_{\hat{e},\lambda}$ of the flat tube $\mathscr{T}_\lambda\cap V_{\hat{e}}$ and satisfies integrability conditions of the type* (8) *in Euclidean*

directions. $H^G_{\hat{e},\lambda}$ has a slow increase near the real in $\mathscr{D}_{\hat{e},\lambda}$ and has therefore a boundary value in the sense of distributions.

The derivation of this property is rather intricate and will be found in the appendix. Let us only stress that it is crucial for the proof that the various boundary values of H^G satisfy Steinmann relations.

5.4 Moving the Time Direction

In the previous section we have seen that for any time direction $\hat{e} \in V^+$ and any tube $\mathscr{T}_\lambda$, there exists a function $H^G_{\hat{e},\lambda}$ which is analytic inside a neighbourhood $\mathscr{D}_{\hat{e},\lambda}$ of the flat tube $\mathscr{T}_\lambda \cap V_{\hat{e}}$. As a matter of fact $\mathscr{D}_{\hat{e},\lambda}$ itself can be chosen as a convex tube. In this section we intend to move the time direction $\hat{e}$ everywhere in the light cone and prove that the various functions $H^G_{\hat{e},\lambda}$ are pieces of the same analytic function H^G_λ.

For this purpose we shall need the following well known result. Assume that a domain $\mathscr{D}$ is covered by a family of domains $\{\mathscr{D}_i, i \in \mathscr{I}\}$ and that in each $\mathscr{D}_i$ an analytic function φ_i is given. Assume that in each non empty $\mathscr{D}_i \cap \mathscr{D}_j$ we have the compatibility condition $\varphi_i = \varphi_j$. Then it is possible to define a single valued function φ which is analytic inside $\mathscr{D}$ and in any $\mathscr{D}_i$ is identical with φ_i. Now we are in a position to prove:

Proposition 14. *For any $\lambda \in \Lambda^{(n)}$, the functions $\{H^G_{\hat{e},\lambda}, \hat{e} \in V^+\}$ introduced in the previous section are pieces of a unique function H^G_λ which is analytic inside the tube T_λ with convex conical basis $\gamma_\lambda \otimes V^+$:*

$$T_\lambda = \{k \in \mathbb{C}^{4(n-1)} : \operatorname{Im} k \in \gamma_\lambda \otimes V^+\}$$

where $\gamma_\lambda \otimes V^+$ denotes the tensor product of the cones γ_λ and V^+.

Proof. Consider the direction $\hat{e}_i$ $(i = 1, 2)$ and the corresponding function $H^G_{\hat{e}_i,\lambda}$ which is analytic inside the tube $\mathscr{D}_{\hat{e}_i,\lambda}$. If non empty, the intersection $\mathscr{D}_{\hat{e}_1,\lambda} \cap \mathscr{D}_{\hat{e}_2,\lambda}$ is then a connected convex tube. Moreover for any point k inside $\mathscr{D}_{\hat{e}_1,\lambda} \cap \mathscr{D}_{\hat{e}_2,\lambda}$, using the convergence at infinity and Stoke's theorem, we check easily that $\Gamma_{\hat{e}_1,k}$ can be distorted into $\Gamma_{\hat{e}_2,k}$ without modifying the value of the integral (7), which yields:

$$\forall k \in \mathscr{D}_{\hat{e}_1,\lambda} \cap \mathscr{D}_{\hat{e}_2,\lambda} \qquad H^G_{\hat{e}_1,\lambda}(k) = H^G_{\hat{e}_2,\lambda}(k).$$

From the remark made above, we conclude to the existence of a unique function H^G_λ which is analytic inside $\bigcup_{\hat{e} \in V^+} \mathscr{D}_{\hat{e},\lambda}$ and is a common analytic continuation of the various $H^G_{\hat{e},\lambda}$.

Now $\bigcup_{\hat{e} \in V^+} \mathscr{D}_{\hat{e},\lambda}$ is not a natural domain of holomorphy since its basis is not convex. We claim that its holomorphy envelope contains the tube T_λ with convex conical basis $\gamma_\lambda \otimes V^+$. Indeed the basis of the flat tube

$\mathscr{T}_\lambda \cap V_{\hat{e}}$ can be written:

$$R_{\hat{e},\lambda} = \{q \in$$ [illegible]

or similarly:

$$R_{\hat{e},\lambda} = \{q$$ [illegible]

And it follows directly from this representation and from the definition of the tensor product of two cones that the convex hull of $\bigcup_{\hat{e} \in V^+} R_{\hat{e},\lambda}$ is precisely $\gamma_\lambda \otimes V^+$. Then it is sufficient to apply the tube theorem [10] to conclude.

5.5 *Getting the Tubes $\mathscr{T}_\lambda$*

In the previous section, we have shown that for any $\lambda \in \Lambda^{(n)}$ there exists a function H_λ^G which is analytic inside the tube T_λ with convex basis $\gamma_\lambda \otimes V^+$. However it is not yet the relevant tube $\mathscr{T}_\lambda$ since we have the following lemma:

Lemma 3. [7]. *The tube T_λ with convex basis $\gamma_\lambda \otimes V^+$ is included in the tube $\mathscr{T}_\lambda$. The equality $T_\lambda = \mathscr{T}_\lambda$ occurs if and only if the cell γ_λ is simplicial.* (We recall that a cell is *simplicial* if limited in $\mathbb{R}^{n-1}$ by $(n-1)$ planes. Non-simplicial cells appear when $n \geqq 5$.)

Thus in order to recover the analytic structure of a general n-point function as defined above in Section 2.5, we need to enlarge the analyticity domain of the function H_λ^G when the cell γ_λ is non-simplicial. However since T_λ is a natural domain of holomorphy, this cannot be made by purely geometrical techniques of analytic completion. Actually we shall need the following basic lemma:

Lemma 4. *Let us consider a family $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ of functions which satisfy the following conditions:*

i) *For any $\lambda \in \Lambda^{(n)}$, f_λ is analytic inside the tube T_λ.*

ii) *The various real boundary values $\{f_\lambda(p), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ satisfy the Steinmann relations.*

Then for any $\lambda \in \Lambda^{(n)}$, f_λ is analytic inside the tube $\mathscr{T}_\lambda$.

The proof of this lemma is out of the scope of the present work and will be reported in [27]. It uses a basic property of the Steinmann relations, namely the possibility to "solve" them by introducing auxiliary functions which enjoy better analyticity properties than the original f_λ [23].

Thus in order to apply Lemma 4 to the family $\{H_\lambda^G, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ we need the following

Proposition 15. *The four real boundary values* $\{H^G_{\lambda_+ +}(p), H^G_{\lambda_+ -}(p), H^G_{\lambda_- -}(p), H^G_{\lambda_- +}(p)\}$ *which occur in any quartet of tubes satisfy the quartet relation*

$$H^G_{\lambda_+ +}(p) + H^G_{\lambda_- -}(p) = H^G_{\lambda_+ -}(p) + H^G_{\lambda_- +}(p)$$

in the sense of distributions for all real arguments.

The proof of this property is rather cumbersome and lengthy and will be shown in [27]. In view of Lemma 4, it allows to state

Proposition 16. *For any* $\lambda \in \Lambda^{(n)}$, H^G_λ *is analytic inside the tube* $\mathscr{T}_\lambda$.

5.6 Proof of Coincidence Relations

In this section we intend to prove that the functions $\{H^G_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ are restrictions to the tubes $\{\mathscr{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ of a unique function H^G which is a general n-point function. We shall need the following

Proposition 17. *The two boundary values* $H^G_{\lambda_1}(p)$ *and* $H^G_{\lambda_2}(p)$ *associated with two adjacent tubes* $\mathscr{T}_{\lambda_1}$ *and* $\mathscr{T}_{\lambda_2}$ *separated by a partition* $(I, X\backslash I)$ *coincide (in the sense of distributions) on a real region* $\mathscr{R}_I$

$$\mathscr{R}_I = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : p_I^2 \neq m_I^2, p_I^2 < \tilde{M}_I^2\}$$

where m_I *and* $\tilde{M}_I$ *are certain numbers associated with the partition* $(I, X\backslash I)$.

Proof. In order to prove the coincidence of $H^G_{\lambda_1}(p)$ and $H^G_{\lambda_2}(p)$ on $\mathscr{R}_I$, we remark that it is sufficient to stick to the situation where a given time direction $\hat{e} \in V^+$ has been chosen and prove the coincidence of $H^G_{\hat{e},\lambda_1}(p)$ and $H^G_{\hat{e},\lambda_2}(p)$ on the real open set:

$$\mathscr{R}_{I,\hat{e}} = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : |p_I^0| \neq m_I,\ |p_I^0| < \tilde{M}_I\}\ .$$

Indeed any function $H^G_{\hat{e},\lambda}$ is the restriction to $V_{\hat{e}}$ of the function H^G_λ and we have for all real arguments:

$$H^G_{\hat{e},\lambda}(p) = H^G_\lambda(p)\ .$$

To conclude it is then sufficient to notice that $\mathscr{R}_I = \bigcup_{\hat{e} \in V^+} \mathscr{R}_{I,\hat{e}}$.

Now let us consider the two adjacent tubes $\mathscr{T}_{\lambda_1} \cap V_{\hat{e}}$ and $\mathscr{T}_{\lambda_2} \cap V_{\hat{e}}$, and a complex point k lying on their common face, inside the submanifold $q_I^0 = 0$. First, in order to ensure in (7) the analyticity of the integrand H^G_π in the external variable k, we remark that, in view of Proposition 10, the following condition must be satisfied:

$$|p_I^0| \neq m_I \qquad |p_I^0| < M_I \tag{10}$$

where m_I and M_I are the masses which occur in the definition of Ξ_I in Proposition 7.

FIG. 4

Then we notice that in the complex plane t^0, when q_I^0 tends to zero, the following couples of cuts become confused: $(\hat{\Sigma}_I, \hat{\Sigma}_0)$, $(\hat{\Sigma}_{X\setminus I}, \hat{\Sigma}_0)$ and the two families $\{(\hat{\Sigma}_L, \hat{\Sigma}_{I\cup L}); L\in\mathscr{P}^*(X\setminus I)\}$ and $\{(\hat{\Sigma}_M, \hat{\Sigma}_{M\cup(X\setminus I)}); M\in\mathscr{P}^*(I)\}$.

The situation in the neighbourhood of a given couple $(\hat{\Sigma}_L, \hat{\Sigma}_{I\cup L})$ is shown in Fig. 4. Clearly at the limiting case $q_I^0 = 0$, no contour will get pinched if the two analyticity "gaps" $|u^0 - p_L^0| < m'_L$ and $|u^0 - p_{I\cup L}^0| < m'_{I\cup L}$ have a non-empty intersection: indeed the line $\mathscr{L}$ shown in Fig. 4 will provide a common distortion for each of them. This necessitates the condition $|p_I^0| < (m'_L + m'_{I\cup L})$ to be satisfied. Now this analysis goes similarly with all couples of confused cuts and there exists a certain mass M''_I such as the condition

$$|p_I^0| \neq m_I \qquad |p_I^0| < \tilde{M}_I = \inf(M_I, M''_I) \tag{11}$$

allows the two functions $H^G_{\varepsilon,\lambda_1}$ and $H^G_{\varepsilon,\lambda_2}$ to have a common analytic continuation on the submanifold $q_I^0 = 0$. Since for a function which is analytic and with slow increase near the real in a tube the distribution boundary value is the same for all directions inside this tube, it is enough to tend to the real inside $q_I^0 = 0$ to get the desired result.

Putting together Propositions 15–17, we finally obtain that the functions $\{H^G_\lambda, \lambda\in\Lambda^{(n)}\}$ are pieces of a unique function H^G which is a general n-point function.

5.7 Additional Remark

As in the case of trees, we must point out that H^G is analytic in a domain larger than the "primitive domain" of the physical n-point function. Indeed let us introduce the tree T obtained by "cutting" successively l internal lines of G and denote $\{k_1, k_2, \ldots, k_n, k_{n+1}, \ldots, k_{n+2l}\}$ its $(n+2l)$ external lines. We consider the sets $I\in\mathscr{P}^*(X)$ such as the partition $[I; (X\setminus I)\cup\{n+1, n+2, \ldots, n+2l\}]$ *is not* a vertex partition for T. H^T is analytic on such [illegible] and consequently, in view of the analysis made above, we claim that the coincidence region $\mathscr{R}_I$ of H^G

associated with the channel $(I, X\backslash I)$ is of the form:

[illegible]

This comes from the fact that H^T is analytic on the face $q_I = 0$ and that the pinching of the complex line $\mathscr{L}_k$ is by nature unable to produce in $\mathscr{R}_I$ any condition of the type $p_I^2 \mp m_I^2$.

We shall say that H^G is *one-particle irreducible* in such channels (for a detailed study of the notion of p-particle irreducible functions in axiomatic field theory, see [21]). For instance the convolution product

is one-particle irreducible in the channels t and u.

5.8 Independence of the Antecedent

In this section we shall prove that the G-product does not depend of the original choice of an antecedent $\tilde{G}$ of G.

Let $\tilde{G}_1$ (resp. $\tilde{G}_2$) be an antecedent of G obtained by cutting an internal line i_1 (resp. i_2) of G, and $\tilde{\tilde{G}}_{12}$ the *common* antecedent of $\tilde{G}_1$ and $\tilde{G}_2$ obtained from G by cutting simultaneous i_1 and i_2. For a given time direction $\hat{e}$, with $\tilde{G}_j$ $(j = 1, 2)$ we associate the G-product $H_{\hat{e}}^{G.j}$. Then we introduce the following $4(n-1)$ real dimensional submanifold $\mathscr{E}_0^{(n)}$ in $\mathbb{C}^{4(n-1)}$:

$$\mathscr{E}_0^{(n)} = \{k \in \mathbb{C}^{4(n-1)} : q_i = 0, \; p_i^0 = 0, \; 1 \leq i \leq n\} .$$

$\mathscr{E}_0^{(n)}$ is the *Euclidean region* associated with the time direction $\hat{e}$. In order to check that $H_{\hat{e}}^{G.1}$ and $H_{\hat{e}}^{G.2}$ define the same function at any point of their common analyticity domain, it is enough by analytic continuation to check that they coincide on $\mathscr{E}_0^{(n)}$. As for the latter point, it will appear as a straightforward consequence of the following result, once taken into account the Fubini's theorem for multiple integrals:

Proposition 18. *At any point k inside a neighbourhood of $\mathscr{E}_0^{(n)}$, $H_{\hat{e}}^{G.j}$ $(j = 1, 2)$ satisfies the following representation:*

$$H_{\hat{e}}^{G.j}(k) = \int_{\Gamma_{\hat{e},0}} \int_{\Gamma_{\hat{e},0}} H^{\tilde{\tilde{G}}_{12}}(k, k_{n+1}, \ldots, k_{n+4}) \Big|_{\substack{k_{n+1} = -k_{n+2} = t \\ k_{n+3} = -k_{n+4} = t'}} [H^{(2)}(t)]^{-1} \, [H^{(2)}(t')]^{-1} \, dt \, dt'$$

with $\Gamma_{\hat{e},0} = \mathbb{R}^3 \times L_0$ and $L_0 = i\mathbb{R}$ the imaginary axis in the complex plane t^0 (resp. t'^0).

Proof. Once k is held fixed inside a sufficient small neighbourhood of $\mathscr{E}_0^{(n)}$, the situation in the t^0-plane is as pictured on Fig. 5: all the cuts are centered on the imaginary axis L_0. Then we can choose L_0 as the integration line and write:

$$H_{\hat{e}}^{G.j}(k) = \int_{\Gamma_{\hat{e},0} = \mathbb{R}^3 \times L_0} H_{\pi}^{\tilde{G}_j}(k, t) \, [H^{(2)}(t)]^{-1} \, dt .$$

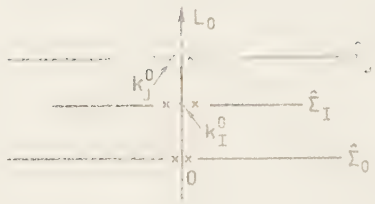


FIG. 5

Now the following basic argument is easily checked: when k lies inside $\mathscr{E}_0^{(n)}$ and t varies on $\Gamma_{\hat{e},0}$, the point $(k, t, -t)$ lies inside the corresponding Euclidean region in $\mathbb{C}^{4(n+1)}$, namely

$$\{(k, k_{n+1}, k_{n+2}) \in \mathbb{C}^{4(n+1)} : q_i = 0,\ p_i^0 = 0,\ 1 \leqq i \leqq n+2\}\ .$$

But at such points in $\mathbb{C}^{4(n+1)}$, the same argument still allows to write, with the *same* contour $\Gamma_{\hat{e},0}$:

$$H_{\hat{e}}^{\tilde{G}_J}(k, k_{n+1}, k_{n+2}) = \int_{t' > 0} H^{\tilde{\tilde{G}}_{12}}(k, k_{n+1}, \ldots, k_{n+4}) \Big|_{k_{n+3} = -k_{n+4} = t'} [H^{(2)}(t')]^{-1}\, dt'$$

which allows to conclude.

Thus we have shown that H^G does not depend of the original choice of an antecedent $\tilde{G}$ of G and this achieves the proof of the recursion property[3]. Taking into account the initial case of trees, we finally obtain:

Theorem 2. *The convolution product associated with any graph G with n external lines is a general n-point function.*

5.9 A Class of Global Representations

In a neighbourhood of $\mathscr{E}_0^{(n)}$ the method used in the proof of Proposition 18 allows to write a *global representation* of H^G, which brings out the individual contributions of the vertex functions as well as the multiple integral prescription associated with the internal lines. Indeed the following fact has been put into evidence: if k belongs to a neighbourhood of $\mathscr{E}_0^{(n)}$ the axis L_0 is a suitable integration line and then the point $(k, t, -t)$ belongs to a neighbourhood of $\mathscr{E}_0^{(n+2)}$. Iterating this argument we get the following representation of $H_{\hat{e}}^G$, at any point k inside a sufficiently small neighbourhood of $\mathscr{E}_0^{(n)}$:

$$H_{\hat{e}}^G(k) = \int_{(\mathbb{R}^3 \times L_0)^l} \prod_{l} \left[H^{(2)}(k, \ldots) \right]^{-1} \prod_{v} H^{(n_v)}(k, \ldots) \, d\mu \qquad (1)$$

with l the number of independent loops of G, and $d\mu$ the usual Euclidean measure in the $4l$ real dimensional linear space $(\mathbb{R}^3 \times L_0)^l$. The first

[3] The argument applies for $l \geqq 2$. In the case $l = 1$ it is straightforward to check that the tree-products $H^{\tilde{G}_1}$ and $H^{\tilde{G}_2}$ define the same relevant restriction.

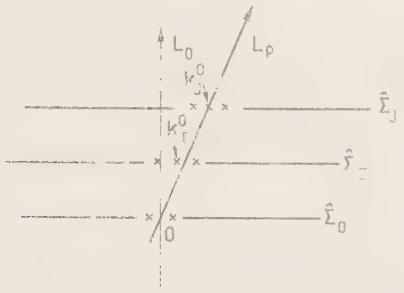


FIG. 6

product extends to the *internal lines* of G; k_i denotes the internal four vector associated with the line i. The second product extends to the *vertices* of G; $H^{(n_v)}$ denotes the general n_v-point function associated with the n_v lines $\{j \in \mathscr{S}_v\}$ of G incident to v. As a result of Sections 4.6 and 5.3, in the course of this iteration the convergence of the multiple integral (12) is ensured by the bounds (3) which we have assumed for any vertex function $H^{(n_v)}$.

Actually a natural extension of this representation is provided by the classical argument of the *Wick rotation* of the contours. Let us consider the family $\{\mathscr{E}_\varrho^{(n)}, \varrho \in \mathbb{R}\}$ of $4(n-1)$ real dimensional submanifolds:

$$\mathscr{E}_\varrho^{(n)} = \{k \in \mathbb{C}^{4(n-1)} \; ; \; q_i = 0, \; p_i^0 = \varrho q_i^0, \; 1 \leq i \leq n\}$$

The following argument is easily checked on Fig. 6: if k belongs to a sufficiently small neighbourhood of $\mathscr{E}_\varrho^{(n)}$, all the cuts are centered along the line L_ϱ (with equation $u^0 = \varrho v^0$) in the t^0-plane. L_ϱ is a suitable integration line and then the point $(k, t, -t)$ belongs to a neighbourhood of $\mathscr{E}_\varrho^{(n+2)}$. Iterating the argument we get the following representation of H_ϱ^G in a neighbourhood of $\mathscr{E}_\varrho^{(n)}$:

$$H_\varrho^G(k) = \int_{(\mathbb{R}^3 \times L_\varrho)^I} \prod_i [H^{(2)}(k_i)]^{-1} \prod_v H^{(n_v)}(\{k_j, j \in \mathscr{S}_v\}) \, d\mu \qquad (13)$$

with $d\mu$ the usual Euclidean measure in $(\mathbb{R}^3 \times L_\varrho)^I$.

However this representation converges only if any vertex function $H^{(n_v)}$ is assumed to enjoy bounds of the type (3) at infinity inside the manifold $\mathscr{E}_\varrho^{(n_v)}$ in $\mathbb{C}^{4(n_v-1)}$.

In this context a special role is played by the limiting case $\varrho \to +\infty$. Then the submanifold $\mathscr{E}_\varrho^{(n)}$ tends to the real space $\mathbb{R}^{4(n-1)}$ and of course the previous representation (13) is nothing but a formal recipe which we must give a precise meaning. This will be done in the next section: under appropriate bounds at all infinite directions *near the real*, we shall prove that (13) still holds *in the sense of the t-boundary values* of the various n-point functions there involved.

6. T-Boundary Value of the Convolution Product

In order to give sense to (13) when the external arguments lie inside the real space $\mathbb{R}^{4(n-1)}$, let us first recall that the t-boundary value of a general n-point function is defined by the following prescription:

$$f_t(p) = \lim_{\substack{k \to p \\ q \in \mathscr{C}_\lambda,\ p \in \Omega_\lambda}} f(k)$$

where the open covering $\{\Omega_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ has been introduced in Section 1.5. That is, f_t is defined by the collection of boundary values $\{f_\lambda(p), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ with the consistency conditions $f_\lambda(p) = f_{\lambda'}(p)$ in any $\Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda'}$. Now we intend to prove:

Proposition 19. *If a sufficiently strong decrease is assumed near the real at infinity, the following representation holds for the t-boundary value H_t^G (in the sense of distributions):*

$$H_t^G(p) = \int_{\mathbb{R}^{4l}} \prod_i [H_t^{(2)}(p_i)]^{-1} \prod_v H_t^{(n_v)}(\{p_j, j \in \mathscr{S}_v\})\, d\mu \qquad (14)$$

with $d\mu$ the Euclidean measure in the space $\mathbb{R}^{4l}$ of internal four-momenta and $H_t^{(n_v)}$ (resp. $H_t^{(2)}$) the t-boundary value of the corresponding general n_v-point (resp. two-point) function.

As in the previous section, the proof will go by recursion over the number l of independent loops of G.

6.1 The Case of Trees

In order to prove that the $l = 0$ form of (14):

$$H_t^T(p) = \prod_v H_t^{(n_v)}(\{p_{I(l,v)}, l \in \mathscr{S}_v\}) \prod_i [H_t^{(2)}(p_I)]^{-1}$$

holds in the sense of distributions, it is enough to check that on any open set of the covering $\{\Omega_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$, all factors are boundary values of functions (with slow increase) analytic is the same domain. We start from the following representation of H^T inside the tube $\mathscr{T}_\lambda$:

$$H_\lambda^T(k) = \prod_v H_{\lambda_v}^{(n_v)}(\{k_{I(l,v)}, l \in \mathscr{S}_v\}) \prod_i [H^{(2)}(k_I)]^{-1}$$

which yields in the sense of distributions for all real arguments:

$$H_\lambda^T(p) = \prod_v H_{\lambda_v}^{(n_v)}(\{p_{I(l,v)}, l \in \mathscr{S}_v\}) \prod_i [H_{\lambda(I)}^{(2)}(p_I)]^{-1}$$

with $\lambda(I)$ the sign of s_I in the cell γ_λ. If we restrict the above relation in the relevant open set Ω_λ, it is easy to check that the n_v real four-vectors $\{p_{I(l,v)}, l \in \mathscr{S}_v\}$ associated with the vertex v belong to the open set Ω_{λ_v}

defined in the relevant space by λ_v. Thus we can apply the Ruelle prescription at each vertex v and replace the factor $H_{\lambda_v}^{(n_v)}$ by $H_t^{(n_v)}$ (and similarly each factor $H_{\lambda(I)}^{(2)}$ by $H_t^{(2)}$), which achieves the proof.

6.2 The General Case

We shall need the following:

Lemma 5. *In order to define the t-boundary value H_t^G it is sufficient to stick to the case of a chosen time direction $\hat{e}$ and apply the following prescription:*

$$\forall\ p \in \Omega_{\hat{e},\lambda}\quad H_t^G(p) = H_{t,\lambda}^G(p)$$

with $\Omega_{\hat{e},\lambda} = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : \lambda(I) p_I^0 > -\tilde{m}_I \ \forall\ I \in \mathscr{P}^*(X)\}$ and $\tilde{m}_I < m_I$, with m_I the discrete mass associated with the partition $(I, X\backslash I)$.

Proof. Since the sets of the family $\{\Omega_{\hat{e},\lambda}, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ form an open covering of $\mathbb{R}^{4(n-1)}$ such that $\Omega_{\hat{e},\lambda} \subset \Omega_\lambda$ for any $\lambda \in \Lambda^{(n)}$, it is a direct consequence of the consistency relations:

$$\forall\ p \in \Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda'}\qquad H_{t,\lambda}^G(p) = H_{t,\lambda'}^G(p)\,.$$

Now the proof of Proposition 19 will be a direct consequence of

Proposition 20. *If a sufficiently strong decrease is assumed near the real at infinity, the t-boundary value of the G-product satisfies (in the sense of distributions):*

$$H_t^G(p) = \int_{\mathbb{R}^4} H_t^{\tilde{G}}(p, p_{n+1}, p_{n+2}) \Big|_{p_{n+1}+p_{n+2}=u} [H_t^{(2)}(u)]^{-1}\, du$$

Proof. In the following we use the Ruelle prescription such as provided by Lemma 5 with a covering $\{\Omega_{\hat{e},\lambda}, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ defined by the following choice of masses:

$$\forall\ I \in \mathscr{P}^*(X)\qquad \tilde{m}_I = \inf(m_I, m_I')\,.$$

(We recall that m_I is the discrete mass in the channel $(I, X\backslash I)$ and m_I' half the minimum of the distance between the two poles of the cut $\hat{\Sigma}_I$.) The reasons for such a choice will appear clearer in the following. Now let us consider a given point $p = (\boldsymbol{p}, p^0)$ in a chosen open set $\Omega_{\hat{e},\lambda}$. We have:

$$\forall\ I \in \mathscr{P}^*(X)\qquad \lambda(I) p_I^0 > -\tilde{m}_I\,.$$

In the following we denote $\mathscr{I}$ the family of proper subsets of X such that

$$\forall\ I \in \mathscr{I}\qquad \lambda(I) p_I^0 > 0 \qquad\qquad \forall\ I \notin \mathscr{I}\qquad -\tilde{m}_I < \lambda(I) p_I^0 \leqq 0\,.$$

We introduce the auxiliary point $\hat{p}^0$ inside the cell γ_λ as follows: if $I \in \mathscr{I}$, we choose $\hat{p}_I^0 = p_I^0$; if $I \notin \mathscr{I}$ we choose $\lambda(I)\hat{p}_I^0$ arbitrary inside the interval $]0, \lambda(I) p_I^0 + \tilde{m}_I[$ in such a way that $\hat{p}^0$ belongs to γ_λ. If we consider the

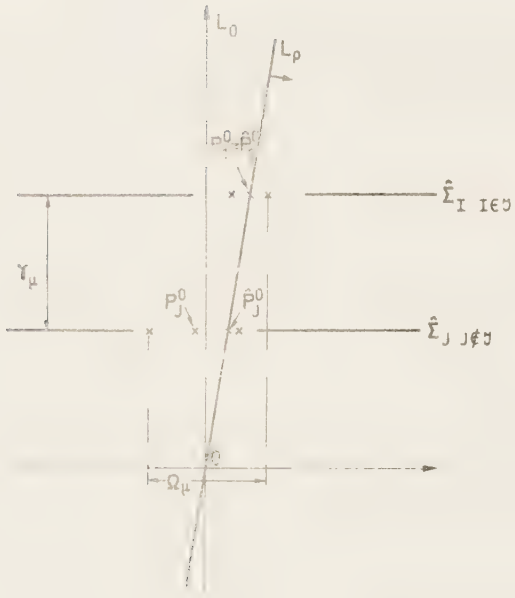


FIG. 7

point $\hat{k} = (\boldsymbol{p}, \hat{p}^0 + iq^0)$ with $\hat{p}^0 = \varrho q^0$ and ϱ positive, it is straightforward that $\hat{k}$ belongs to the submanifold $\mathscr{E}_\varrho^{(n)}$ and q^0 to γ_λ. Since the line L_ϱ is a suitable contour for $\hat{k}$, we can write:

$$H^G_{\hat{e},\lambda}(\hat{k}) = \int_{\mathbb{R}^3 \times L_\varrho} H^{\tilde{G}}_\pi(\hat{k}, t)\,[H^{(2)}(t)]^{-1}\,dt\,.$$

Now if we consider the point $k = (\boldsymbol{p}, p^0 + iq^0)$ it is clear that k lies in a neighbourhood of $\mathscr{E}_\varrho^{(n)}$ in the following sense: if we tend from $\hat{k}$ to k by keeping q^0 fixed and letting $\hat{p}^0$ tend towards p^0, none of the moving cuts $\{\hat{\Sigma}_I, I \notin \mathscr{I}\}$ will intersect the line L_ϱ. This is indeed checked easily on Fig. 7 where the two situations for a partial sum have been pictured. Thus the line L_ϱ is still a suitable contour for k and we write:

$$H^G_{\hat{e},\lambda}(k) = \int_{\mathbb{R}^3 \times L_\varrho} H^{\tilde{G}}_\pi(k, t)\,[H^{(2)}(t)]^{-1}\,dt\,. \tag{15}$$

Now we have the Ruelle prescription:

$$\forall\,(\boldsymbol{p}, p^0) \in \Omega_{\hat{e},\lambda} \qquad H^G_t(\boldsymbol{p}, p^0) = \lim_{\substack{q^0 \to 0 \\ q^0 \in \gamma_\lambda}} H^G_{\hat{e},\lambda}(\boldsymbol{p}, p^0 + iq^0)$$

which we choose to write under the form:

$$H^G_t(\boldsymbol{p}, p^0) = \lim_{\varrho \to +\infty} H^G_{\hat{e},\lambda}\left(\boldsymbol{p}, p^0 + \frac{i}{\varrho}\,\hat{p}^0\right).$$

Taking into account (15) this yields:

$$H_t^G(p,p^0)=\lim_{\varrho\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^3\times L_\varrho} H_\pi^{\tilde G}\left(\left(p,p^0+\frac{i}{\varrho}\hat p^0\right),t\right)\quad [H^{(2)}(t)]^{-1}\,dt \tag{16}$$

provided that sufficiently strong decrease properties at infinity near the real have been assumed.

It is easy to check that when k is fixed as above in a neighbourhood of $\mathscr{E}_\varrho^{(n)}$ and t varies on $\mathbb{R}^3\times L_\varrho$, the point (k,t) is in the situation when the Ruelle prescription in $\mathbb{C}^{4n}$ can be applied (in the limit $\varrho\to\infty$). This is straightforward on Fig. 7 which shows the traces on the plane t^0 of a $(n+2)$-cell γ_μ and of its associated open set Ω_μ. Thus we have:

$$\lim_{\varrho\to+\infty} H_\pi^{\tilde G}\left(\left(p,p^0+\frac{i}{\varrho}\hat p^0\right),t\right)[H^{(2)}(t)]^{-1}=H_t^{\tilde G}(p,p_{n+1},p_{n+2})\Big|_{p_{n+1}=\cdots=p_{n+2}=u}[H_t^{(2)}(u)]^{-1}.$$

Here, in view of the analyticity properties of $H_\pi^{\tilde G}$, the right-hand side is meaningful in the sense of distributions. Then (16) can be rewritten (in the sense of distributions):

$$H_t^G(p)=\int_{\mathbb{R}^4} H_t^{\tilde G}(p,p_{n+1},p_{n+2})\Big|_{p_{n+1}=\cdots=p_{n+2}=u}[H_t^{(2)}(u)]^{-1}\,du$$

which is the desired result.

7. An Application to Perturbation Theory

Since the idea of G-convolution originates from the consideration of Feynmann perturbative series, it is natural to set the question of the applications of our study to perturbation theory. In this paper we do not consider the case of a polynomial interaction lagrangian since a special study would have there to be made in view of renormalization. However we can deal with all theories in which convergence in Euclidean directions is assumed to hold [29].

In fact as a consequence of Theorem 2, we shall see that the Feynmann amplitudes associated with a certain class of "superpropagators" which is defined below satisfy all the requirements of the linear program.

The superpropagators $w(k)$ which we consider are general two-point functions which satisfy a bound of the following type in the Euclidean directions:

$$|w(k)|<\frac{C_K}{[p^2+(q^0)^2]^{2+\eta}} \tag{17}$$

with η strictly positive and $p^0\in K$.

Then, with any function w and any graph G with n external lines, we associate the amplitude:

$$F^G(k)=\int_{(\mathbb{R}^3\times L_0)^I}\prod_i w(k_i)\,d\mu\,. \tag{18}$$

Here the external variables k are taken in a neighbourhood of the Euclidean region $\mathcal{E}_0^{(n)}$; l is the number of independent loops of G; the product extends to the *internal lines* i of G; k_i denotes the internal four-vector associated with the line i; $d\mu$ is the usual Euclidean measure in the Euclidean region of the internal variables $(\mathbb{R}^3 \times L_0)^l$. In view of (17), this integral is absolutely convergent. As a straightforward consequence of Theorem 2, we shall prove:

Proposition 21. *The integral* (18) *defines an analytic function* F^G *whose analytic continuation satisfies all the requirements of the linear program (i.e. is a general n-point function).*

Proof. With each vertex v of G, we associate the function

$$H^{(n_v)}(\{k_j, j \in \mathcal{S}_v\}) = \prod_{j \in \mathcal{S}_v} w(k_j)$$

(the product extends to all the lines of G incident to the vertex v). It is clear that each function $H^{(n_v)}$ is a general n_v-point function: indeed it is analytic in a domain which is much larger than the n_v-point primitive domain, namely the whole space $\mathbb{C}^{4(n_v-1)}$ minus all the cuts $\{k_j^2 = m_j^2, k_j^2 = M_j^2 + \varrho\}$. With this definition of the vertex functions all the factors w^{-1} cancel out in (12) which is reduced to (18). Then we apply Theorem 2.

In particular this result shows that in the Efimov "non local" field theory (which assumes Euclidean convergence) the amplitudes associated with Feynmann graphs satisfy all the requirements of the linear program. In contrast with [29] no regularization is needed here. Arbitrary singular behaviour of the superpropagator $w(k)$ for $k^2 \to +\infty$ are moreover allowed.

8. Final Remark

An alternative method has been recently proposed by Glaser [17] for a new derivation of the central proof of this paper. This method is an extension of the one already used by Epstein and Glaser in their basic work on renormalization theory [30]. In fact these authors have shown that the linear properties of general quantum field theory, expressed in the present paper in terms of the Steinmann-Ruelle-Araki boundary values of the n-point function in momentum space, can be equivalently formulated in terms of the vacuum expectation values of chronological products submitted to the requirements of "local factorization".

In this context, a general notion of G-convolution can also be defined and a corresponding version of Theorem 2 can be given, in which one is led to prove that the local factorization of the chronological products is preserved by G-convolution. There most of the proof has to be worked out in real position space.

This method presents real advantages of algebraic simplicity, in particular it avoids the technical problems encountered with Steinmann relations. On the other hand the method used in the present paper deals more directly with analyticity properties in momentum space. It shows that most of the facts involved in G-convolution are direct consequences of the geometry of the n-point primitive domain and that in order to define the G-product integrability conditions have only to be postulated in the Euclidean region, thus allowing to include the case of arbitrary singular behaviour on the real.

Appendix

This appendix is devoted to the proof of Proposition 13.

Among all the planes $s_I = s_J$ introduced by Definition 6 and which divide $\mathbb{R}^{n-1}$ into the family of pseudocells $\{\sigma_\mu, \mu \in \Theta^{(n)}\}$, the only ones which do not coincide with a face $s_K = 0$ of the original cell configuration are those corresponding to two non empty *disjoint* subsets.

Thus let us consider a given cell γ_λ and, in the family $\{\sigma_\mu, \mu \in M_\lambda\}$ of the pseudocells contained in it, two adjacent cones σ_{μ_+} and σ_{μ_-} separated by such a plane $s_I = s_J$ with $I \cap J = \emptyset \cdot \sigma_{\mu_+}$ is chosen to lie on the side $s_I > s_J$. Now Proposition 11 ensures that it is possible to define a function $H^G_{\hat{e},\mu_+}$ (resp. $H^G_{\hat{e},\mu_-}$) which is analytic inside a neighbourhood of the flat tube S_{μ_+} (resp. S_{μ_-}) and thus defined:

$$\forall k \in S_{\mu_+} \qquad H^G_{\hat{e},\mu_+}(k) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathscr{L}_k} H^{\tilde{G}}_\pi(k, t)\,[H^{(2)}(t)]^{-1}\,dt\,.$$

i) In a first step, let us prove that these two functions are pieces of a unique function, analytic in a neighbourhood of the convex hull of $S_{\mu_+} \cup S_{\mu_-}$.

For this purpose let us consider a point k_+ (resp. k_-) inside S_{μ_+} (resp. S_{μ_-}). We choose k_+ and k_- symmetrical with respect to the common face $q^0_I = q^0_J$ and denote k their common *fixed* projection onto this face.

In view of Proposition 12, we can define the discontinuity:

$$[H^G_{\hat{e},\mu_+} - H^G_{\hat{e},\mu_-}](k) = \lim_{q^0_I - q^0_J \to 0} [H^G_{\hat{e},\mu_+}(k_+) - H^G_{\hat{e},\mu_-}(k_-)]$$

in the sense of distributions in the variable $(p_I - p_J)$.

Now we shall prove that this discontinuity is equal to zero at any point k inside the common face. Since $q^0_I = q^0_J$ the domain of analyticity of $H^{\tilde{G}}_\pi$ in the t^0-plane becomes disconnected. Actually the following couples of cuts are confused: for any $L \in \mathscr{P}(X \backslash (I \cup J))$, $(\hat{\Sigma}_{I \cup L}, \hat{\Sigma}_{J \cup L})$ with $\mathscr{P}(A)$ the set of subsets of A. The situation is as shown on Fig. 8. It is convenient to describe the two limiting contours $\mathscr{L}_{k_+}$ (resp. $\mathscr{L}_{k_-}$) by giving their projection l_+ (resp. l_-) onto the space of the variables

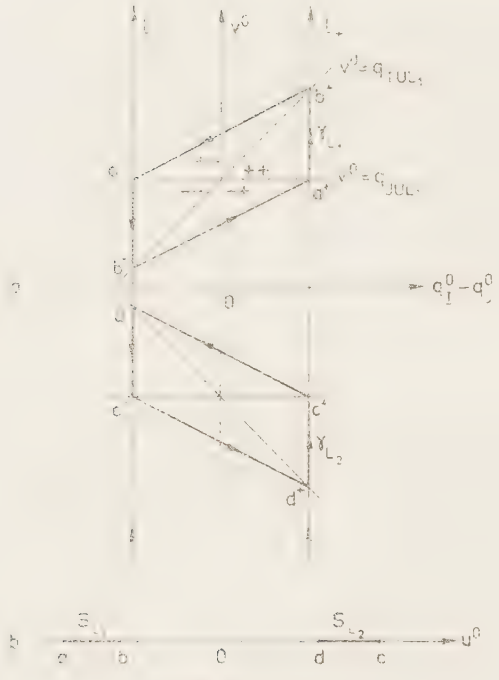


FIG. 8

$(q_I^0 - q_J^0, v^0)$, as in Fig. 8a. Fig. 8b represents their common projection onto the space of the variable u^0. (We recall that $t^0 = u^0 + iv^0$.) The couples (a, a^+), (b, b^+) (resp. $(a, a^-), (b, b^-)$) define points on $\mathscr{L}_{k_+}$ (resp. $\mathscr{L}_{k_-}$). We choose $\mathscr{L}_{k_+}$ (resp. $\mathscr{L}_{k_-}$) as a broken line and it is defined by associating with every point of l_+ (resp. l_-) inside the interval $a^+ b^+$ (resp. $a^- b^-$) the corresponding barycenter on ab.

Now H_π^G is analytic on the submanifold $q_I^0 = q_J^0$ and using the Stoke's theorem, it is not difficult to get:

$$H^G_{C,\pi_+}(k,\ldots) - H^G_{C,\pi_-}(k,\ldots) = \sum_{L \subset X\setminus(I\cup J)} \int_{\hat{\Sigma}_{I\cup L}} H_\pi^{\tilde{G}}(k,t)\,[H^{(2)}(t)]^{-1}\,dt + \varepsilon(q_I^0 - q_J^0)\,.$$

Here the vanishing contribution $\varepsilon(q_I^0 - q_J^0)$ comes from the difference of the infinite parts of the cycles $\mathscr{L}_{k_+}$ and $\mathscr{L}_{k_-} \cdot \gamma_L$ is the cycle with projection onto the space $(q_I^0 - q_J^0, v^0)$ as shown on Fig. 8a: it is limited by the straight lines $v^0 = q^0_{I\cup L}$ and $v^0 = q^0_{J\cup L}$ and corresponds to the pinching of the contours between the cuts $\hat{\Sigma}_{I\cup L}$ and $\hat{\Sigma}_{J\cup L}$. γ_{L_1} and γ_{L_2} are symmetrical with respect to the $(q_I^0 - q_J^0)$ axis if $L_1 \cup L_2 = X\setminus(I\cup J)$.

Now let us concentrate on the edge $v^0 = q^0_{I\cup L} = q^0_{J\cup L}$: it is the trace in the face $q^0_{n+1} + q^0_{n+2} = 0$ of the common edge of a *quartet* of tubes associated with the two following *transverse* partitions:

$$[I\cup L\cup\{n+2\}, (X\setminus(I\cup L))\cup\{n+1\}]$$

and

$$[J\cup L\cup\{n+2\}, (X\setminus(J\cup L))\cup\{n+1\}]\,.$$

If we denote $\{H^{\tilde G}_{++}, H^{\tilde G}_{+-}, H^{\tilde G}_{--}, H^{\tilde G}_{-+}\}$ the corresponding branches of $H^{\tilde G}$, we can write the following quartet relation on $\mathbb{R}^{4(n+1)}$:

$$H^{\tilde G}_{++}(p) + H^{\tilde G}_{--}(p) = H^{\tilde G}_{+-}(p) + H^{\tilde G}_{-+}(p)\,.$$

Now it is a consequence of the edge of the wedge theorem that such a relation is still valid for the restriction $H^{\tilde G}_\pi$ taken at any *complex* point (k, t) [27]:

$$H^{\tilde G}_{\pi,\,++}(k,t) + H^{\tilde G}_{\pi,\,--}(k,t) = H^{\tilde G}_{\pi,\,+-}(k,t) + H^{\tilde G}_{\pi,\,-+}(k,t)\,. \tag{19}$$

When $(q^0_I - q^0_J)$ tends to zero the cycle γ_L shrinks to nothing, so that in the limit we are led to integrate the combination $[H^{\tilde G}_{\pi,++} - H^{\tilde G}_{\pi,+-} + H^{\tilde G}_{\pi,--} - H^{\tilde G}_{\pi,-+}]$ on the segment s_L as shown on Fig. 8b. More precisely:

$$[H^G_{\hat e,\mu_+} - H^G_{\hat e,\mu_-}](k) = \sum_{L\in\mathscr{P}(X\setminus(I\cup J))} \int_{\mathbb{R}^3\times s_L} [H^{\tilde G}_{\pi,++} - H^{\tilde G}_{\pi,+-} + H^{\tilde G}_{\pi,--} - H^{\tilde G}_{\pi,-+}](k,u) \cdot [H^{(2)}(u)]^{-1}\,du$$

where the summation is easily checked to be meaningful in the sense of distributions. Then in view of (19), we have proved $H^G_{\hat e,\mu_+}(k) = H^G_{\hat e,\mu_-}(k)$ at any point k inside the common face of S_{μ_+} and S_{μ_-} and the edge of the wedge theorem ensures analyticity inside a neighbourhood of the convex hull of $S_{\mu_+}\cup S_{\mu_-}$.

ii) In a second step, we remark that any two pseudocells of the family $\{\sigma_\mu, \mu\in M_\lambda\}$ can always be connected by a finite chain of adjacent pseudocells of the same family. In view of i), this entails the existence of a function $H^G_{\hat e,\lambda}$ analytic at all points lying in a neighbourhood of $\mathscr{T}_\lambda\cap V_{\hat e}$, except at those exceptional points which belong to several submanifolds $q^0_I = q^0_J$. But these "edges" belong to the convex hull of the analyticity domain of $H^G_{\hat e,\lambda}$ and the tube theorem [10] allows to conclude.

This ends the proof of Proposition 13.

Acknowledgements. The author would like to thank Dr. J. Bros for an introduction to axiomatic field theory, for his generous help and advice during all the course of this work and for communicating to him unpublished results. He is also greatly indebted to Drs. H. Epstein, D. Iagolnitzer, J. Lascoux, and R. Stora for many fruitful discussions, and to Prof. V. Glaser for private communications.

References

1. Streater, R.F., Wightman, A.S.: *PCT*, spin-statistics and all that. New York: Benjamin 1964
2. Jost, R.: The general theory of quantized fields. Am. Math. Soc. Providence, 1965
3. Lehmann, H., Symanzik, K., Zimmermann, W.: Nuovo Cimento **1**, 205 (1954); **6**, 319 (1957)
4. Hepp, K.: In: Axiomatic field theory, Vol. 1. New York: Gordon and Breach 1965
5. Steinmann, O.: Helv. Phys. Acta **33**, 257, 347 (1960)
6. Ruelle, D.: Nuovo Cimento **19**, 356 (1961)
7. Araki, H.: J. Math. Phys. **2**, 163 (1961); Suppl. Progr. Theor. Phys. **18** (1961)
8. Lehmann, H.: Nuovo Cimento **10**, 579 (1958)
9. Bogoliubov, N.N., Medvedev, B.V., Polivanov, M.K.: Questions of dispersion relation theory. Moscow: 1958
10. Epstein, H.: In: Axiomatic field theory, Vol. 1. New York: Gordon and Breach 1965
11. Bros, J., Epstein, H., Glaser, V.: Nuovo Cimento **31**, 1265 (1964)
    Bros, J., Epstein, H., Glaser, V.: Commun. math. Phys. **1**, 240 (1965)
12. Bros, J., Epstein, H., Glaser, V.: Helv. Phys. Acta **45**, 149 (1972)
13. Iagolnitzer, D., Stapp, H.P.: Commun. math. Phys. **14**, 15 (1969)
14. Iagolnitzer, D.: Introduction to *S*-matrix theory. Paris: A.D.T. 1973
15. Martin, A.: Nuovo Cimento **42**A, 930 (1966); **44**A, 1219 (1966)
16. Martin, A.: Scattering theory: Unitarity, analyticity and crossing. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969
17. Glaser, V.: Private communication
18. Symanzik, K.: J. Math. Phys. **1**, 249 (1960) and in Symposium on theoretical physics. Vol. 3. New York: Plenum Press 1967
19. Bros, J.: In: Analytic methods in mathematical physics. New York: Gordon and Breach 1970
20. Bros, J.: Private communication
21. Lassalle, M.: Analyticity properties implied .... II. One-particle and two-particle irreducibility properties of the *n*-point function (to appear)
22. Glaser, V., Lehmann, H., Zimmermann, W.: Nuovo Cimento **6**, 1122 (1957)
23. Bros, J.: Thesis (Paris, 1970) and in High energy physics and elementary particles. Vienna: I.A.E.A. 1965
24. Epstein, H.: J. Math. Phys. **1**, 524 (1960)
25. Bros, J., Iagolnitzer, D.: Ann. Inst. H. Poincaré A **18**, 147 (1973)
26. Ruelle, D.: Unpublished
27. Lassalle, M.: Thesis, to appear
28. Bremermann, H.: Thesis. Schrift. Math. Inst. Univ. Münster **5** (1951)
29. Alebastrov, V.A., Efimov, G.V.: Commun. math. Phys. **31**, 1 (1973)
30. Epstein, H., Glaser, V.: CERN preprints TH. 1156 (1970); TH. 1344 (1971); TH. 1400 (1971)

Communicated by R. Haag

M. Lassalle
Ecole Polytechnique
Centre de Physique Théorique
17, rue Descartes
F-75230 Paris Cedex 05, France

S E C O N D E P A R T I E

APPENDICES MATHEMATIQUES

APPENDICE I

Dans la description des relations de Steinmann donnée à la Section 2.2, est énoncée sans démonstration une propriété fondamentale de ce système linéaire : l'existence d'une classe spéciale de relations (les "relations à quatre") qui engendrent toutes les autres.

Cet appendice est consacré à la preuve de cette propriété, due à Ruelle mais restée jusqu'ici non publiée [1]. Nous en présentons une version sensiblement différente dans le cadre naturel de l'algèbre abstraite de dérivations de Steinmann.

I.1. L'ALGEBRE ABSTRAITE DE STEINMANN.

Nous rappelons ici les principales propriétés de cette algèbre. Pour les démonstrations on se reportera aux Ref. [2-3].

Considérons l'algèbre formelle associative libre sur l'anneau des entiers engendrée par deux ensembles d'éléments $\{A_i, i \text{ entier positif}\}$ et $\{\theta_{jk} ; j,k \text{ entiers positifs, } j \neq k\}$. Prenons le quotient de cette algèbre libre par l'idéal engendré par tous les commutateurs $[\theta_{ij}, A_k]$ et $[\theta_{ij}, \theta_{kl}]$ et par tous les éléments à répétition. Adjoignons lui un élément unité e. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre ainsi obtenue.

Dans $\mathcal{A}$ on introduit pour tout entier j positif des dérivations (notées $A_j\uparrow$, $A_j\downarrow$, $\hat{A}_j$) par leur action sur les générateurs de $\mathcal{A}$:

i) appliquées aux θ_{ik}, elles donnent toutes zéro .

ii) $A_j\uparrow \; A_i = \theta_{ji}[A_j, A_i]$

$A_j\downarrow \; A_i = -\theta_{ij}[A_j, A_i]$

$\hat{A}_j \; A_i = [A_j, A_i]$

$\hat{A}_j$ est la dérivation intérieure associée à A_j.

Si en outre nous supposons que tous les θ_{ij} satisfont les relations suivantes :

i) $\theta_{ij} + \theta_{ji} = e$

ii) $\theta_{ij}\theta_{kj} - \theta_{ij}\theta_{ki} - \theta_{kj}\theta_{ik} = 0$

ce qui entraîne aussi

iii) $\theta_{ji}\theta_{jk} - \theta_{ji}\theta_{ik} - \theta_{jk}\theta_{ki} = 0$

on démontre facilement que les dérivations introduites satisfont les règles de commutation :

$$[A_i\uparrow,\ A_j\uparrow] = 0 \qquad (1a)$$

$$[A_i\downarrow,\ A_j\downarrow] = 0 \qquad (1b)$$

$$\hat{A}_j = A_j\uparrow - A_j\downarrow \qquad (1c)$$

L'ensemble des dérivations $A_i\uparrow$ et $A_i\downarrow$ engendre une <u>algèbre de Lie</u> $\mathfrak{D}$ qui peut être construite (à un isomorphisme près) de la manière suivante : on forme l'algèbre de Lie engendrée par $\{A_i\downarrow,\ A_i\uparrow,\ \forall\ i \in \mathbb{N}^+\}$, et on fait le quotient par l'idéal défini par les relations (1a,b) et par l'annulation des éléments à répétition.

$\mathfrak{D}$ est alors à la fois un <u>module</u> et une algèbre de Lie graduée : $\mathfrak{D} = \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{D}^{(n)}$ où $\mathfrak{D}^{(n)}$ est le sous-module des éléments homogènes de degré n. On l'appelle algèbre abstraite de Steinmann.

A tout couple d'ensembles d'entiers positifs (I^+, I^-) avec $n^\pm = |I^\pm|$ et $n^+ + n^- = n$, on associe le sous-ensemble de $\mathfrak{D}^{(n)}$ (noté $\mathfrak{D}^{(n)}_{I^+I^-}$) engendré par l'ensemble $\mathfrak{M}^{(n)}_{I^+I^-}$ des <u>monômes emboîtés</u>

$$[A_{i_1}\Updownarrow, [A_{i_2}\Updownarrow, [\ldots[A_{i_{n-1}}\downarrow, A_{i_n}\uparrow]\ldots]]] \in \mathfrak{D}^{(n)}$$

qui contiennent n^+ éléments $A_i\uparrow$ (quand $i \in I^+$) et n^- éléments $A_i\downarrow$ (quand $i \in I^-$). On a clairement

$$\mathfrak{D}^{(n)} = \bigoplus_{(I^+, I^-)} \mathfrak{D}^{(n)}_{I^+I^-}$$

et $\mathfrak{D}^{(n)}_{I^+I^-}$ est muni d'une structure de sous-module.

L'ensemble $\mathfrak{M}^{(n)}_{I^+I^-}$ n'est pas une base pour $\mathfrak{D}^{(n)}_{I^+I^-}$. En fait les monômes de $\mathfrak{M}^{(n)}_{I^+I^-}$ satisfont toutes les relations linéaires obtenues à partir de l'identité de Jacobi et des relations (1). Cet ensemble de relations (noté $\mathfrak{s}^{(n)}_{I^+I^-}$) est précisément l'ensemble des relations de Steinmann associé au couple (I^+,I^-).

Notons la

Définition I.1

Un monôme emboîté est dit normal si pour tout couple de facteurs consécutifs $A_{i_p}\uparrow$, $A_{i_{p+1}}\uparrow$ (ou $A_{i_p}\downarrow$, $A_{i_{p+1}}\downarrow$), on a $i_p < i_{p+1}$.

Ce qui permet d'établir [2] la

Proposition I.1

Si j est un élément fixé dans I^+ (resp. I^-), l'ensemble des monômes emboîtés normaux terminés par $A_j\uparrow$ (resp. $A_j\downarrow$) forment une base du sous-module $\mathfrak{D}^{(n)}_{I^+I^-}$.

Considérons alors l'ensemble des cellules $\{\gamma_\lambda,\ \lambda\in\Lambda^{(n)}\}$ introduites précédemment dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Chaque cellule appartient à un cône ouvert convexe $\pi_{I^+I^-}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ ainsi défini :

Définition I.2

A toute partition de l'ensemble $X=\{1,2,\dots,n\}$ en deux sous-ensembles non vides (I^+,I^-), on associe le cône suivant :

$$\pi_{I^+I^-} = \{s\in\mathbb{R}^{n-1} : s_i > 0 \ \forall\, i\in I^+ \ ;\ s_j < 0 \ \forall\, j\in I^-\}$$

On appelle ce cône l'orchestre associé au couple (I^+,I^-). Tous les orchestres sont disjoints et l'union de leurs fermetures est $\mathbb{R}^{n-1}$ tout entie

Alors nous pouvons énoncer le <u>théorème de structure</u> fondamental [2-3]

<u>Théorème I.1</u>

i) A toute cellule γ_λ contenue dans un orchestre $\pi_{I^+I^-}$ on peut associer un élément unique R_λ dans $\mathfrak{D}^{(n)}_{I^+I^-}$.

ii) Pour tout couple de cellules adjacentes $(\gamma_{\lambda_1}, \gamma_{\lambda_2})$ associées respectivement aux dérivations $(R_{\lambda_1}, R_{\lambda_2})$ dans $\mathfrak{D}^{(n)}$, il existe deux éléments de degré inférieur $R_{\lambda'} \in \mathfrak{D}^{(p)}$ et $R_{\lambda''} \in \mathfrak{D}^{(n-p)}$ $(0 < p < n)$ tels que dans $\mathfrak{D}^{(n)}$ on ait l'égalité :

$$R_{\lambda_1} - R_{\lambda_2} = [\, R_{\lambda'}, R_{\lambda''}] \qquad (2)$$

(relation de discontinuité de Ruelle). Ici $\gamma_{\lambda'}$ et $\gamma_{\lambda''}$ sont ainsi définies : si γ_{λ_1} et γ_{λ_2} sont séparées par la partition $(I, X\backslash I)$ avec $s_I > 0$ dans γ_{λ_1}, alors $p = |I|$. Ensuite, il suffit pour définir $\gamma_{\lambda'}$ (resp. $\gamma_{\lambda''}$) de conserver parmi les inégalités qui définissent γ_{λ_1} (ou γ_{λ_2}) celles qui portent sur les variables de l'ensemble I (resp. $X\backslash I$).

Cet ensemble particulier de dérivations $\{R_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ contenu dans l'algèbre $\mathfrak{D}^{(n)}$ correspond par homomorphisme à l'ensemble des valeurs au bord réelles $\{H_\lambda(p),\ \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ de la fonction de n points. Il en exhibe toute la <u>structure algébrique</u> et c'est lui que nous allons désormais étudier.

Enonçons d'abord la

<u>Proposition I.2</u> [2]

L'ensemble $\mathfrak{M}^{(n)} = \bigoplus_{(I^+, I^-)} \mathfrak{M}^{(n)}_{I^+I^-}$ des monômes emboîtés (générateurs de $\mathfrak{D}^{(n)}$) appartient à l'ensemble $\{R_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ et à chacun de ces monômes μ_α est associée une cellule γ_α <u>simpliciale</u>.

<u>Corollaire</u>

Chaque R_λ est soit un monôme emboîté de $\mathfrak{D}^{(n)}$, soit une combinaison linéaire à coefficients entiers de monômes emboîtés.

I.2 LES RELATIONS DE STEINMANN.

Considérons l'algèbre de Lie graduée $\mathfrak{D} = \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{D}^{(n)}$ introduite précédemment et dans chaque $\mathfrak{D}^{(n)}$ l'ensemble des éléments $\{R_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$. Considérons l'idéal de Lie engendré dans cette algèbre par tous les éléments de Jacobi du type

$$[R_{\lambda_1},[R_{\lambda_2},R_{\lambda_3}]] + [R_{\lambda_2},[R_{\lambda_3},R_{\lambda_1}]] + [R_{\lambda_3},[R_{\lambda_1},R_{\lambda_2}]]$$

avec R_{λ_i} $(i=1,2,3)$ quelconque dans $\{R_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n_i)}\}$ et $\sum_{i=1}^{3} n_i \leq n$.

Si l'on identifie à zéro les éléments homogènes de degré n de cet idéal on obtient le système linéaire $\mathcal{T}^{(n)}$ auquel satisfont tous les éléments de $\mathfrak{D}^{(n)}$. Les relations de Steinmann sont les relations de ce système faisant intervenir les seuls éléments $\{R_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$. Autrement dit, le système $\mathcal{T}^{(n)}$ contient plus de relations que celui de Steinmann : il comporte en particulier toutes les relations de Ruelle (Théorème I.1), à savoir :

$$R_{\lambda_+} - R_{\lambda_-} = [R_{\lambda'}, R_{\lambda''}] \qquad (2)$$

où R_{λ_+} et R_{λ_-} sont associés dans $\mathbb{R}^{n-1}$ à deux cellules séparées par une partition $(I, X\setminus I)$ et où l'on a $R_{\lambda'} \in \mathfrak{D}^{(|I|)}$ et $R_{\lambda''} \in \mathfrak{D}^{(|X\setminus I|)}$.

Plus généralement, il comporte également toutes les relations obtenues en itérant convenablement (2) et qui expriment n'importe quel commutateur multiple $[[R_{\lambda_1},[R_{\lambda_2},\ldots,[R_{\lambda_q},R_{\lambda_{q+1}}],\ldots,R_{\lambda_p}]]] \in \mathfrak{D}^{(n)}$ comme une combinaison linéaire à coeffcients ± 1 de 2^{p-1} éléments de l'ensemble $\{R_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$.

Une telle décomposition d'un commutateur n'est pas unique : les relations de Steinmann sont précisément les conditions de compatibilité des différentes décompositions.

Parmi les relations de Steinmann, les "relations à quatre" déjà introduites vont jouer un rôle particulier. Rappelons qu'elles sont du type :

$$R_{\lambda_{++}} + R_{\lambda_{--}} = R_{\lambda_{-+}} + R_{\lambda_{+-}}$$

où les dérivations $\{R_{\lambda_{++}}, R_{\lambda_{-+}}, R_{\lambda_{--}}, R_{\lambda_{+-}}\}$ sont associées dans $\mathbb{R}^{n-1}$ à un <u>quatuor</u> de cellules $\{\gamma_{\lambda_{++}}, \gamma_{\lambda_{-+}}, \gamma_{\lambda_{--}}, \gamma_{\lambda_{+-}}\}$.

Clairement les relations à quatre constituent l'ensemble des conditions de compatibilité des différentes décompositions de Ruelle de tous les commutateurs à deux éléments, avec :

$$R_{\lambda_{++}} - R_{\lambda_{-+}} = [\, R_{\lambda'}, R_{\lambda''}] = R_{\lambda_{+-}} - R_{\lambda_{--}}$$

I.3. <u>POSER LE PROBLEME</u>.

C'est dans le cadre de l'algèbre abstraite $\mathfrak{D}$ que nous allons maintenant démontrer que les relations à quatre engendrent tout le système $\mathfrak{s}^{(n)}$ des relations de Steinmann.

Considérons pour tout n la donnée d'un ensemble $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ d'éléments d'un espace vectoriel $\mathfrak{F}$ (ce peut être un espace de distributions, de fonctions analytiques, etc...).

Définissons une application h de l'ensemble $\{R_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ dans $\mathfrak{F}$ en posant :

$$\forall\, \lambda \in \Lambda^{(n)} \qquad h(R_\lambda) = f_\lambda$$

Définition I.3

L'application h est dite admissible si les éléments $\{f_\lambda,\ \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ qui la définissent satisfont les relations à quatre. C'est-à-dire, si pour tout quatuor de cellules on a la relation :

$$h(R_{\lambda_{++}}) + h(R_{\lambda_{--}}) = h(R_{\lambda_{-+}}) + h(R_{\lambda_{+-}})$$

Alors au vu des paragraphes précédents il est clair que les éléments $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ satisfont le système des relations de Steinmann si l'application h qu'ils définissent s'étend à tout $\mathfrak{D}^{(n)}$ comme homomorphisme de modules de $\mathfrak{D}^{(n)}$ dans $\mathfrak{F}$.

Nous sommes ainsi amenés à prouver le

Théorème I.2

Si l'application h est admissible, elle s'étend à tout $\mathfrak{D}^{(n)}$ et y définit un homomorphisme de modules de $\mathfrak{D}^{(n)}$ dans $\mathfrak{F}$.

I.4. PREUVE DU THEOREME.

Considérons les éléments de $\mathfrak{D}^{(n)}$ de la forme

$$\mu = [[[R_1, R_2], \dots, [[R_k, R_{k+1}]], \dots, R_p]]]$$

où chaque R_k appartient à l'ensemble de dérivations $\{R_\beta, \beta \in \Lambda^{(n_k)}\}$ avec $\sum_{k=1}^{p} n_k = n$. Un tel élément est déterminé de façon unique :

i) par la donnée dans $\mathbb{R}^{n-1}$ d'un produit de cellules $\gamma_1 \times \gamma_2 \times \dots \times \gamma_k \times \dots \times \gamma_p$ où chaque γ_k est la cellule associée à la dérivation R_k dans l'espace $\mathbb{R}^{n_k - 1}$ des variables de l'ensemble $I_k = \{i_1, i_2, \dots, i_{n_k}\}$.

ii) par un commutateur multiple τ à p éléments (nous dirons (p-1)-commutateur). On vérifie facilement que sa structure est celle d'un arbre constitué de partitions successives en deux rameaux à chaque vertex.

Nous utilisons désormais la notation : $\mu = (\gamma_1 \times \ldots \times \gamma_p ; \tau)$ et désignons par $\mathfrak{L}^{(p)} \subset \mathfrak{D}^{(n)}$ l'ensemble de tous ces éléments.

Définition I.4

Deux éléments de $\mathfrak{L}^{(p)}$ sont adjacents s'ils s'écrivent

$$(\gamma_1 \times \gamma_2 \ldots \times \gamma_{q-1} \times \sigma_+ \times \gamma_{q+1} \ldots \times \gamma_p ; \tau) \quad \text{et} \quad (\gamma_1 \times \gamma_2 \ldots \times \gamma_{q-1} \times \sigma_- \times \gamma_{q+1} \ldots \times \gamma_p ; \tau)$$

où σ_+ et σ_- sont deux cellules adjacentes dans $\mathbb{R}^{n_q - 1}$.

Définition I.5

Quatre éléments $\{\mu_{\alpha\beta} ; \alpha,\beta = \pm\}$ de $\mathfrak{L}^{(p)}$ forment un quatuor s'ils peuvent s'écrire

$$\mu_{\alpha\beta} = (\gamma_1 \times \gamma_2 \ldots \gamma_{q-1} \times \sigma_{\alpha\beta} \times \gamma_{q+1} \ldots \times \gamma_p ; \tau)$$

où les cellules $\{\sigma_{\alpha\beta} ; \alpha,\beta = \pm\}$ forment un quatuor dans $\mathbb{R}^{n_q - 1}$.

Définition I.6

Si l'application h s'étend à $\mathfrak{L}^{(p)}$, on dit que cette extension est admissible dans $\mathfrak{L}^{(p)}$ si pour tout quatuor dans $\mathfrak{L}^{(p)}$ elle satisfait la relation à quatre

$$h(\mu_{++}) + h(\mu_{--}) = h(\mu_{+-}) + h(\mu_{-+})$$

Considérons maintenant deux cellules adjacentes σ_+ et σ_- dans $\mathbb{R}^{n_q - 1}$ séparées par la partition $[\{i_1, \ldots, i_r\} ; \{i_{r+1}, \ldots, i_{n_q}\}]$ et désignons par R_+ et R_- les dérivations qui y sont associées dans la famille $\{R_\beta, \beta \in \Lambda^{(n_q)}\}$. La relation fondamentale de Ruelle s'écrit :

$$R_+ - R_- = [R_1, R_2]$$

où R_1 (resp. R_2) est une dérivation de la famille $\{R_\alpha, \alpha \in \Lambda^{(r)}\}$ (resp. $\{R_{\alpha'}, \alpha' \in \Lambda^{(n_q - r)}\}$) associée à une cellule σ_1 (resp. σ_2) dans $\mathbb{R}^{r-1}$ (resp. $\mathbb{R}^{n_q - r - 1}$) définie en conservant parmi les inégalités qui définissent σ_+ (ou σ_-) celles qui portent sur les variables de l'ensemble $\{i_1, \ldots, i_r\}$ (resp. $\{i_{r+1}, \ldots, i_{n_q}\}$).

Si l'on considère alors deux éléments adjacents dans $\mathcal{L}^{(p)}$ de la forme

$$\mu_{\pm} = (\gamma_1 \times \cdots \gamma_{q-1} \times \sigma_{\pm} \times \gamma_{q+1} \cdots \times \gamma_p \ ; \ \tau)$$

au vu de ce qui précède on a clairement dans $\mathcal{L}^{(p+1)}$:

$$\mu_+ - \mu_- = (\gamma_1 \times \cdots \gamma_{q-1} \times \sigma_1 \times \sigma_2 \times \gamma_{q+1} \cdots \times \gamma_p \ ; \ \hat{\tau})$$

où le p-commutateur $\hat{\tau}$ s'obtient à partir du (p-1)-commutateur τ par adjonctio au rang q du commutateur simple à deux éléments.

Inversement, tout élément de $\mathcal{L}^{(p+1)}$ peut s'écrire $\hat{\mu} = \mu_+ - \mu_-$ mais le couple d'éléments adjacents $(\mu_+, \mu_-) \in \mathcal{L}^{(p)} \times \mathcal{L}^{(p)}$ ainsi déterminé n'est pas unique.

Nous sommes alors en mesure de prouver le lemme simple suivant :

Lemme I.1

Il est équivalent de dire

i) l'application h s'étend à $\mathcal{L}^{(p)}$ et y est admissible

ii) l'application h s'étend à $\mathcal{L}^{(p+1)}$

Preuve : Pour tout $\hat{\mu} \in \mathcal{L}^{(p+1)}$, on choisit un couple (μ_+, μ_-) d'éléments adjacents de $\mathcal{L}^{(p)}$ tels que $\hat{\mu} = \mu_+ - \mu_-$. Si on définit $h(\hat{\mu}) = h(\mu_+) - h(\mu_-)$, on réalise ainsi une extension de h à $\mathcal{L}^{(p+1)}$ si et seulement si le second membre est indépendant du couple choisi.

Considérons pour cela deux couples adjacents quelconques (μ_+, μ_-) et (μ'_+, μ'_-) tels que $\hat{\mu} = \mu_+ - \mu_- = \mu'_+ - \mu'_-$. On vérifie facilement que deux situations peuvent se présenter :

a) ou bien (μ_+, μ_-) et (μ'_+, μ'_-) sont associés au même (p-1)-commutateu et s'écrivent :

$$\mu_{\pm} = (\gamma_1 \times \cdots \gamma_{q-1} \times \sigma_{\pm} \times \gamma_q \cdots \times \gamma_p \ ; \ \tau)$$

$$\mu'_{\pm} = (\gamma_1 \times \cdots \gamma_{q-1} \times \sigma'_{\pm} \times \gamma_q \cdots \times \gamma_p \ ; \ \tau)$$

Alors on peut toujours construire une chaîne finie de couples interpolants $(\mu_+^{(\ell)}, \mu_-^{(\ell)})$ tels que :

i) $\mu_{\pm}^{(\ell)} = (\gamma_1 \times \cdots \gamma_{q-1} \times \sigma_{\pm}^{(\ell)} \times \gamma_q \cdots \times \gamma_p \; ; \; \tau)$

ii) $\mu_{\pm}^{(0)} = \mu_{\pm}$ et $\mu_{\pm}^{(m)} = \mu'_{\pm}$

iii) pour tout $0 \leq \ell < m$, les éléments $\{\mu_+^{(\ell)}, \mu_-^{(\ell)}, \mu_-^{(\ell+1)}, \mu_+^{(\ell+1)}\}$ forment un quatuor dans $\mathfrak{L}^{(p)}$.

Il vient alors directement que

$$h(\mu_+) - h(\mu_-) = h'(\mu'_+) - h(\mu'_-)$$

si et seulement si l'application h est admissible dans $\mathfrak{L}^{(p)}$.

b) (μ_+, μ_-) et (μ'_+, μ'_-) sont associés à deux (p-1)-commutateurs distincts et s'écrivent

$$\mu_{\pm} = (\gamma_1 \times \cdots \gamma_{q-1} \times \sigma_{\pm} \times \gamma_{q+2} \cdots \gamma_{r-1} \times \sigma'_1 \times \sigma'_2 \times \gamma_{r+2} \cdots \times \gamma_{p+1} \; ; \; \tau)$$

$$\mu'_{\pm} = (\gamma_1 \times \cdots \gamma_{q-1} \times \sigma_1 \times \sigma_2 \times \gamma_{q+2} \cdots \gamma_{r-1} \times \sigma'_{\pm} \times \gamma_{r+2} \cdots \times \gamma_{p+1} \; ; \; \tau')$$

Introduisons alors les quatre éléments $\{\widetilde{\mu}_{\alpha\beta} \; ; \; \alpha, \beta = \pm\}$ ainsi définis dans $\mathfrak{L}^{(p-1)}$:

$$\widetilde{\mu}_{\alpha\beta} = (\gamma_1 \times \cdots \gamma_{q-1} \times \sigma_\alpha \times \gamma_{q+2} \cdots \gamma_{r-1} \times \sigma'_\beta \times \gamma_{r+2} \cdots \times \gamma_{p+1} \; ; \; \tau'')$$

où τ'' est obtenu à partir de τ (resp. τ') par suppression d'un commutateur simple au rang r (resp. q). Comme par hypothèse h s'étend à $\mathfrak{L}^{(p)}$, on vérifie facilement que

$$h(\mu_{\pm}) = h(\widetilde{\mu}_{\pm \, +}) - h(\widetilde{\mu}_{\pm \, -})$$

et $$h(\mu'_{\pm}) = h(\widetilde{\mu}_{+ \, \pm}) - h(\widetilde{\mu}_{- \, \pm})$$

ce qui achève la preuve.

Dans une seconde étape, on prouve le lemme fondamental suivant :

Lemme I.2

Si l'application h s'étend à $\mathcal{L}^{(p)}$, elle y est admissible.

Preuve : Considérons un quatuor $\{\mu_{\alpha\beta} \ ; \ \alpha,\beta = \pm\}$ dans $\mathcal{L}^{(p)}$ du type :

$$\mu_{\alpha\beta} = (\gamma_1 \times \cdots \gamma_{q-1} \times \sigma_{\alpha\beta} \times \gamma_{q+1} \cdots \times \gamma_p \ ; \ \hat{\tau})$$

où les cellules $\sigma_{\alpha\beta}$ forment un quatuor dans $\mathbb{R}^{n_q - 1}$.

L'extension de h à $\mathcal{L}^{(p)}$ a été définie par

$$h(\mu_{\alpha\beta}) = h(\mu_{\alpha\beta+}) - h(\mu_{\alpha\beta-})$$

où $(\mu_{\alpha\beta+}, \mu_{\alpha\beta-})$ est un couple d'éléments adjacents de $\mathcal{L}^{(p-1)}$ avec $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta+} - \mu_{\alpha\beta-}$.

Deux cas peuvent alors se présenter :

a) ou bien les éléments $\mu_{\alpha\beta+}$ et $\mu_{\alpha\beta-}$ sont adjacents dans $\mathcal{L}^{(p-1)}$ à un rang $r \neq q$ et s'écrivent :

$$\mu_{\alpha\beta\pm} = (\gamma_1 \times \cdots \gamma_{r-1} \times \widetilde{\sigma}_{\pm} \times \gamma_{r+2} \cdots \gamma_{q-1} \times \sigma_{\alpha\beta} \times \gamma_{q+1} \cdots \times \gamma_p \ ; \ \tau) \ .$$

Alors la famille $\{\mu_{\alpha\beta\pm} \ ; \ \alpha,\beta = \pm\}$ est un quatuor dans $\mathcal{L}^{(p-1)}$. Comme h y est admissible, on a la relation :

$$h(\mu_{++\pm}) + h(\mu_{--\pm}) = h(\mu_{-+\pm}) + h(\mu_{+-\pm})$$

qui suffit à prouver :

$$h(\mu_{++}) + h(\mu_{--}) = h(\mu_{-+}) + h(\mu_{+-})$$

b) ou bien $\mu_{\alpha\beta+}$ et $\mu_{\alpha\beta-}$ sont adjacents dans $\mathcal{L}^{(p-1)}$ au rang q et s'écrivent :

$$\mu_{\alpha\beta\pm} = (\gamma_1 \times \cdots \gamma_{q-1} \times \sigma_{\alpha\beta\pm} \times \gamma_{q+2} \cdots \times \gamma_p \ ; \ \tau) \ .$$

Désignons alors par (K_1,K_2) et (J_1,J_2) les deux partitions <u>transverses</u> de l'ensemble $I_q = \{i_1,\dots,i_{n_q}\}$ qui définissent dans $\mathbb{R}^{n_q-1}$ le quatuor $\{\sigma_{\alpha\beta}\ ;\ \alpha,\beta = \pm\}$. La situation géométrique dans l'espace $\mathbb{R}^{n_q+n_{q+1}-1}$ est celle représentée sur la Figure 1.

On se convainc facilement que sur l'arête $s_{K_1} = s_{J_1} = s_{I_q} = s_{I_{q+1}} = 0$ s'appuient par continuité dix huit cellules nées de l'enchevêtrement dans $\mathbb{R}^{n_q+n_{q+1}-1}$ des deux sextets associés aux partitions (J_1,J_2,I_{q+1}) et (K_1,K_2,I_{q+1}) de l'ensemble $I_q \cup I_{q+1}$. Ces dix huit cellules sont elles mêmes triangulées par toutes les partitions transverses à (I_q,I_{q+1}) dans $I_q \cup I_{q+1}$; mais, on a vu (Lemme I.1,a) que cette triangulation peut être ignorée puisque h est admissible dans $\mathcal{L}^{(p-1)}$.

On peut alors symboliser la situation comme sur la Figure 1b où on a représenté les neuf cellules situées du côté $s_{I_{q+1}} > 0$ et identifié les cellules de la famille $\{\sigma_{\alpha\beta+}\ ;\ \alpha,\beta = \pm\}$. On vérifie facilement que les quatre cellules qui s'appuient sur chacune des quatre arêtes de cette triangulation forment un quatuor dans $\mathbb{R}^{n_q+n_{q+1}-1}$. En écrivant les relations à quatre correspondantes, il vient directement :

$$\mu_{+++} + \mu_{--+} = \mu_{+-+} + \mu_{-++}$$

et de même pour la famille $\{\mu_{\alpha\beta-}\ ;\ \alpha,\beta = \pm\}$.
Puisque h est admissible dans $\mathcal{L}^{(p-1)}$, il vient alors :

$$h(\mu_{++\pm}) + h(\mu_{--\pm}) = \mu(\mu_{+-\pm}) + h(\mu_{-+\pm})$$

ce qui achève la preuve.

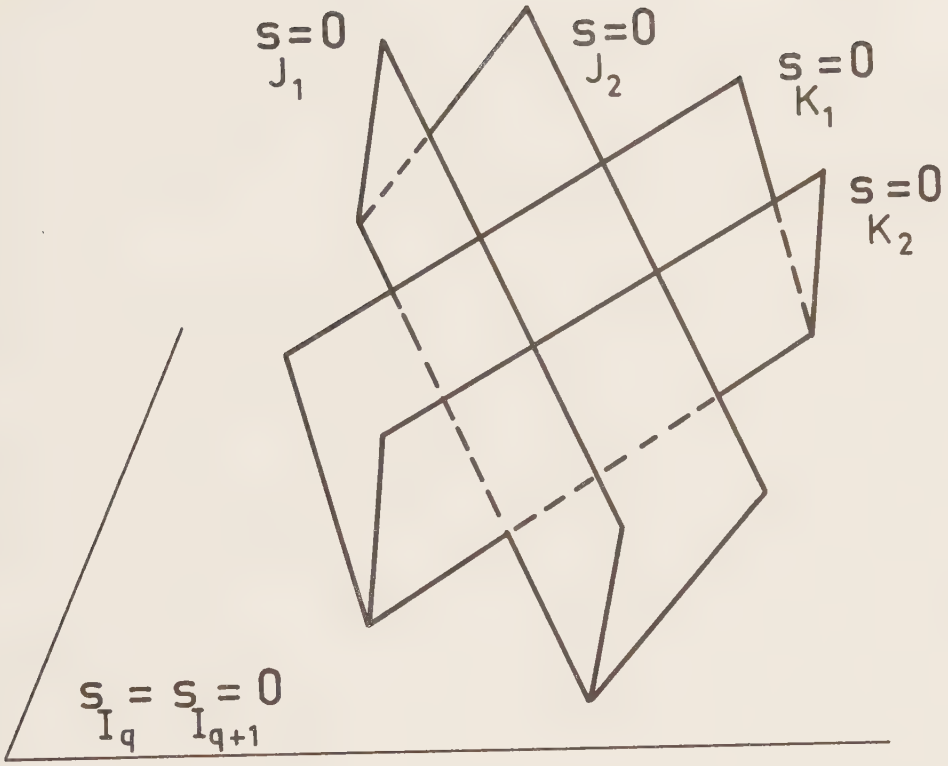


FIG. 1a

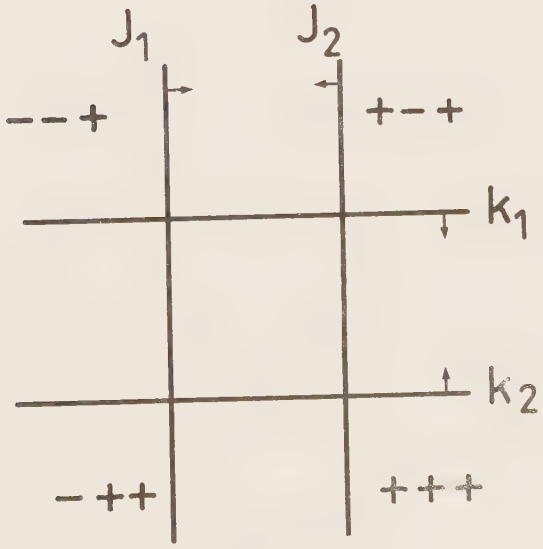


FIG. 1b

Nous pouvons alors aborder la

Preuve du théorème I.2

Elle se fait par récurrence.
Si l'application h définie sur la famille $\{R_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$, c'est-à-dire dans $\mathfrak{L}^{(1)}$ par les relations $h(R_\lambda) = f_\lambda$ est admissible, elle s'étend (Lemme I.1) à $\mathfrak{L}^{(2)}$ où (Lemme I.2) elle est alors admissible. Et, ainsi de suite, h s'étend à $\bigcup_{p=1}^{n} \mathfrak{L}^{(p)}$.
Il reste à démontrer qu'elle définit bien un homomorphisme de modules de $\mathfrak{D}^{(n)}$ dans $\mathfrak{F}$. Pour cela, il faut d'abord vérifier qu'elle conserve les relations de Jacobi au sens suivant.
Désignons par σ_α ($\alpha = 1,2,3$) une cellule quelconque dans $\mathbb{R}^{n_\alpha - 1}$ avec $\sum_{\alpha=1}^{3} n_\alpha = n$. A chacune des trois permutations $\{i,j,k\}$ de $\{1,2,3\}$, associons l'élément μ_{ijk} suivant dans $\mathfrak{D}^{(n)}$:

$$\mu_{ijk} = (\gamma_1 \times \dots \gamma_{q-2} \times \sigma_i \times \sigma_j \times \sigma_k \times \gamma_{q+2} \dots \times \gamma_p \ ; \ \tau)$$

où au rang q le (p-1)-commutateur τ s'écrit avec un double commutateur $[\bullet,[\bullet,\bullet]]$. Nous dirons que ces éléments forment un triplet de Jacobi dans $\mathfrak{L}^{(p)}$.
Alors on a le

Lemme I.3

Pour tout triplet de Jacobi, on a

$$h(\mu_{123}) + h(\mu_{231}) + h(\mu_{312}) = 0$$

Preuve : on vérifie facilement qu'à tout triplet de Jacobi dans $\mathfrak{L}^{(p)}$ on peut associer dans $\mathfrak{L}^{(p-2)}$ un sextet d'éléments $\{\mu_{++-}, \mu_{-+-}, \mu_{-++}, \mu_{---}, \mu_{+-+}, \mu_{+--}\}$ ainsi définis :

$$\mu_{\alpha\beta\gamma} = (\gamma_1 \times \dots \gamma_{q-2} \times \sigma_{\alpha\beta\gamma} \times \gamma_{q+2} \dots \times \gamma_p \ ; \ \tilde{\tau})$$

où $\tilde{\tau}$ est obtenu à partir de τ par la suppression au rang q du double commutateur $[\bullet,[\bullet,\bullet]]$ et où les cellules $\{\sigma_{++-}, \sigma_{-+-}, \sigma_{-++}, \sigma_{---}, \sigma_{+-+}, \sigma_{+--}\}$

forment un sextet dans $\mathbb{R}^{n_i+n_j+n_k-1}$. De la définition de l'extension de h à $\mathfrak{L}^{(p)}$ on tire alors :

$$h(\mu_{123}) = h(\mu_{++-}) - h(\mu_{-+-}) + h(\mu_{--+}) - h(\mu_{+-+})$$

$$h(\mu_{231}) = h(\mu_{+-+}) - h(\mu_{---}) + h(\mu_{-+-}) - h(\mu_{-++})$$

$$h(\mu_{312}) = h(\mu_{-++}) - h(\mu_{--+}) + h(\mu_{+--}) - h(\mu_{++-})$$

ce qui achève la preuve du Lemme I.3.

Pour terminer la preuve du Théorème I.2, on note alors que le module $\mathfrak{D}^{(n)}$ est le quotient du module libre $\hat{\mathfrak{L}}$ engendré par $\bigcup_{p=1}^{n} \mathfrak{L}^{(p)}$ par le sous-module engendré par les relations de Jacobi. Alors l'application h définie sur $\hat{\mathfrak{L}}$ par linéarité passe au quotient au vu du Lemme I.3 et définit un homomorphisme de modules de $\mathfrak{D}^{(n)}$ dans $\mathfrak{F}$. q. e. d.

APPENDICE II

Cet appendice est consacré à la preuve du Lemme 4 (énoncé sans démonstration page 212) qui établit la propriété de complétion analytique suivante :

Lemme

Considérons une famille de fonctions $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ telles que :
i) pour tout $\lambda \in \Lambda^{(n)}$, f_λ est analytique dans le tube T_λ (de base $\gamma_\lambda \otimes V^+$)
ii) les diverses valeurs au bord $\{f_\lambda(p), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ satisfont les relations de Steinmann.

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda^{(n)}$, f_λ est analytique dans le tube $\mathcal{T}_\lambda$.

Auparavant, nous allons devoir rappeler certains résultats algébriques essentiels pour la preuve. On se reportera utilement à [2] pour les démonstrations.

II.1. L'ALGEBRE ABSTRAITE DE BROS.

Nous considérons le module libre sur l'anneau des entiers $\Sigma^{(n)} = \bigoplus_{(I^+,I^-)} \Sigma^{(n)}_{I^+I^-}$ où le sous-module $\Sigma^{(n)}_{I^+I^-}$ est engendré par l'ensemble $T^{(n)}_{I^+I^-}$ des graphes simplement connexes ("arbres de Bros") qui satisfont aux propriétés suivantes :
i) avoir n sommets identifiés par un entier $i \in I^+$ (resp. $j \in I^-$) et noté alors $\times$ i (resp. $\bullet$ j)
ii) toute ligne de l'arbre relie deux sommets de type différent.

A tout arbre t_β, nous pouvons associer le cône simplicial c_β de $\mathbb{R}^{n-1}$ ainsi défini : chaque ligne $\times$——$\bullet$ de l'arbre t_β définit une partitio
j k

de l'ensemble des sommets en deux sous-ensembles J et K tels que $j \in J$ et $k \in K$. On obtient alors c_β par la règle suivante :

$$c_\beta = \{s \in \mathbb{R}^{n-1} \ : \ s_J = -s_K > 0 \qquad \forall \ \underset{j \quad k}{\times\!\!-\!\!\bullet} \text{ ligne de } t_\beta\}$$

On voit facilement que l'orchestre $\pi_{I^+I^-}$ (Définition I.2) contient tous les cônes c_β associés aux arbres $t_\beta \in T^{(n)}_{I^+I^-}$.

Nous pouvons alors munir le module Σ d'une structure d'algèbre de Lie en définissant le produit suivant ; à tout couple d'arbres $(t_1,t_2) \in T^{(n_1)}_{I_1^+ I_1^-} \times T^{(n_2)}_{I_2^+ I_2^-}$, on associe l'élément suivant de $T^{(n_1+n_2)}_{(I_1^+ \cup I_2^+ \, , \, I_1^- \cup I_2^-)}$ noté $[t_1,t_2]$:

$[t_1,t_2] = 0$ si un sommet au moins est commun à t_1 et t_2. Et sinon,

$$[t_1,t_2] = \sum_{\substack{i_1 \in I_1^+ \\ j_2 \in I_2^-}} t_1 \ \underset{i_1 \quad j_2}{\otimes\!\!-\!\!\bullet} \ t_2 \ - \sum_{\substack{j_1 \in I_1^- \\ i_2 \in I_2^+}} t_1 \ \underset{j_1 \quad i_2}{\bullet\!\!-\!\!\otimes} \ t_2 \ .$$

On vérifie facilement que ce produit est anticommutatif et satisfait à l'identité de Jacobi.

On définit ensuite un homomorphisme unique d'algèbres de Lie ℓ de $\mathfrak{D}$ dans Σ en posant :

$$\ell(A_i \uparrow) = \times \ i \in T^{(1)}$$

$$\ell(A_i \downarrow) = \bullet \ i \in T^{(1)} \ .$$

Les éléments $A_i \updownarrow$ engendrent tout l'algèbre $\mathfrak{D}$ et on a la

Proposition II.1 [2]

A toute dérivation $R_\lambda \in \mathfrak{D}^{(n)}_{I^+I^-}$ associée à une cellule γ_λ contenue dans l'orchestre $\pi_{I^+I^-}$, l'homomorphisme d'algèbres de Lie ℓ associe

l'élément suivant dans $\Sigma^{(n)}_{I^+I^-}$:

$$\ell(R_\lambda) = (-1)^{n-} \sum_\beta k_{\lambda\beta}\, t_\beta \qquad (3\,a)$$

où la sommation s'étend à tous les arbres $t_\beta \in T^{(n)}_{I^+I^-}$ avec :

- $k_{\alpha\beta} = 1$ si $\gamma_\lambda \subset c_\beta \subset \pi_{I^+I^-}$

- $k_{\alpha\beta} = 0$ dans tout autre cas.

De plus, le système $\mathfrak{Z}^{(n)}_{I^+I^-}$ des relations de Steinmann est alors identiquement satisfait par les seconds membres de (3 a).

Remarque : On a convenu ici d'écrire les monômes emboîtés générateurs de $\mathfrak{D}$ avec la flèche la plus à droite du type $\uparrow$.

La Proposition II.1 est fondamentale et justifie l'introduction du module Σ. Elle établit en effet que les arbres de Bros "résolvent" les relations de Steinmann. C'est une représentation particulière "à support" de ces arbres que nous allons maintenant étudier.

A tout arbre $t_\beta \in T^{(n)}_{I^+I^-}$, associons pour cela dans $\mathbb{R}^{4(n-1)}$ le cône $C_\beta = c_\beta \otimes V^+$ défini par :

$$C_\beta = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} \;:\; p_J = -p_K \in V^+ \,,\ \forall\ \overset{j}{\times}\!\!\longleftarrow\!\!\overset{k}{\bullet} \text{ ligne de } t_\beta\}$$

On vérifie facilement que dans l'espace des positions son cône dual $\tilde{C}_\beta$ s'écrit :

$$\tilde{C}_\beta = \{x \in \mathbb{R}^{4(n-1)} \;:\; x_j - x_k \in \overline{V}^+ \,,\ \forall\ \overset{j}{\times}\!\!\longleftarrow\!\!\overset{k}{\bullet} \text{ ligne de } t_\beta\}$$

Rappelons finalement deux propriétés importantes (Proposition I.2) de l'ensemble $\mathfrak{M}^{(n)} = \bigoplus_{(I^+,I^-)} \mathfrak{M}^{(n)}_{I^+I^-}$ des monômes emboîtés qui engendrent le sous-module $\mathfrak{D}^{(n)}$:

i) chaque monôme emboîté appartient à l'ensemble $\{R_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$

ii) la cellule associée dans $\mathbb{R}^{n-1}$ est simpliciale (c'est-à-dire possède (n-1) faces).

Pour bien individualiser ces éléments, nous suivrons désormais la convention de Bros et les noterons R_α, en réservant l'index λ pour tous les éléments qui ne sont pas des monômes emboîtés mais des combinaisons linéaires à coefficients entiers de monômes emboîtés.

Alors nous pouvons énoncer la propriété fondamentale suivante [2] :

Proposition II.2

Si a chaque monôme emboîté $R_\alpha \in \mathfrak{M}^{(n)}_{I^+I^-}$, on associe une distribution $\tilde{f}_\alpha(x)$ de telle sorte que :

i) on préserve ainsi le système $\mathfrak{s}^{(n)}_{I^+I^-}$ des relations de Steinmann

ii) le support de chaque distribution $\tilde{f}_\alpha(x)$ soit contenu dans le cône $\bigcup_{\beta\,;\,k_{\alpha\beta}=1} \tilde{C}_\beta$ où les coefficients $k_{\alpha\beta}$ sont ceux de la Proposition II.1 :

$$\ell(R_\alpha) = (-1)^{n-} \sum_\beta k_{\alpha\beta}\, t_\beta \qquad (3b)$$

Alors on peut associer à chaque arbre $t_\beta \in T^{(n)}_{I^+I^-}$ une distribution $\tilde{g}_\beta(x)$ à support dans le cône $\tilde{C}_\beta$ telle que :

i) pour tout R_α, on ait :

$$\tilde{f}_\alpha(x) = (-1)^{n-} \sum_\beta k_{\alpha\beta}\, \tilde{g}_\beta(x) \qquad (4)$$

ii) le système $\mathfrak{s}^{(n)}_{I^+I^-}$ des relations de Steinmann soit identiquement satisfait par les seconds membres de (4).

C'est de cette propriété fondamentale de décomposition en distributions auxiliaires à support dont nous aurons besoin pour la preuve du Lemme. Auparavant nous allons devoir prouver un théorème de restriction de supports également décisif pour la suite.

II.2. RESTRICTION DE SUPPORTS ET RELATIONS DE STEINMANN.

Nous allons démontrer le théorème suivant qui (après la Proposition II.2) illustrera de nouveau combien satisfaire l'algèbre des relations de Steinmann est une propriété contraignante.

Théorème II.1

Si à chaque monôme emboîté $R_\alpha = [A_{i_1} \Uparrow, [A_{i_2} \Uparrow, [\ldots [A_{i_{n-1}} \downarrow, A_{i_n} \uparrow] \ldots]]]$ on associe une distribution $\widetilde{f}_\alpha(x)$ de telle sorte que :

i) le support de $\widetilde{f}_\alpha(x)$ soit contenu dans le cône convexe

$$\{x \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : (x_{i_n} - x_{i_{n-1}}) \in \overline{V}^+\}$$

ii) on préserve ainsi le système $\mathcal{S}^{(n)}_{I^+I^-}$ des relations de Steinmann,

alors le support de chaque $\widetilde{f}_\alpha(x)$ est contenu dans le cône $\bigcup_{\beta\,;\,k_{\alpha\beta}=1} \widetilde{C}_\beta$,

où les coefficients $k_{\alpha\beta}$ sont ceux de la formule (3b).

Remarque

A partir d'une hypothèse très faible sur les supports des distributions $\widetilde{f}_\alpha(x)$ (puisqu'exprimée par une seule condition), ce théorème du seul fait de l'algèbre des relations de Steinmann permet d'améliorer considérablement la connaissance de ceux-ci. De plus les conditions d'application de la Proposition II.2 sont alors réunies et on peut conclure à l'existence d'une décomposition en distributions auxiliaires à support du type (4) pour chaque $\widetilde{f}_\alpha(x)$.

Preuve [9] i) Considérons le monôme emboîté R_α et choisissons un élément quelconque $A_{i_p} \uparrow$, $i_p \in I^+$. Les relations de Steinmann dans $\mathcal{D}^{(n)}_{I^+I^-}$ impliquent

que R_α se décompose sur l'ensemble des monômes emboîtés normaux terminés par $A_{i_p}\uparrow$ qui (Proposition I.1) forment une base de $\mathfrak{D}^{(n)}_{I^+I^-}$.

Cette décomposition est la suivante :

$$R_\alpha = \sum_{\alpha'} c_{\alpha'} R^{(p)}_{\alpha'} \qquad (5)$$

où α' représente une permutation des éléments $\{i_{p+1},\dots,i_n\}$ et $R^{(p)}_{\alpha'}$ un monôme emboîté du type

$$R^{(p)}_{\alpha'} = [A_{i_1}\Updownarrow,[A_{i_2}\Updownarrow,[\dots A_{i_{p-1}}\Updownarrow,[A_{\alpha'(i_{p+1})}\Updownarrow,[\dots[A_{\alpha'(i_n)}\downarrow,A_{i_p}\uparrow]\dots]]\dots]]] \ .$$

En effet, il suffit pour obtenir une telle décomposition d'exprimer

$$\mu_p = [A_{i_p}\uparrow,[A_{i_{p+1}}\Updownarrow,[\dots[A_{i_{n-1}}\downarrow,A_{i_n}\uparrow]\dots]]]$$

sur l'ensemble des monômes emboîtés normaux du type

$$\mu_{\alpha'} = [A_{\alpha'(i_{p+1})}\Updownarrow,[A_{\alpha'(i_{p+2})}\Updownarrow,[\dots[A_{\alpha'(i_n)}\downarrow,A_{i_p}\uparrow]\dots]]]$$

qui constitue (Proposition I.1) une base du sous-module de $\mathfrak{D}^{(n-p+1)}$ auquel appartient μ_p. La relation (5) est alors obtenue en composant à gauche la décomposition

$$\mu_p = \sum_{\alpha'} c_{\alpha'} \mu_{\alpha'}$$

par

$$[A_{i_1}\Updownarrow,[A_{i_2}\Updownarrow,[\dots[A_{i_{p-1}}\Updownarrow,[\ \bullet\ ]]\dots]]] \ ;$$

ii) Dans une seconde étape, utilisons la conservation des relations de Steinmann par l'application $R_\alpha \to \widetilde{f}_\alpha(x)$. Nous pouvons écrire l'homologue de (5), c'est-à-dire

$$\widetilde{f}_\alpha(x) = \sum_{\alpha'} c_{\alpha'} \widetilde{f}^{(p)}_{\alpha'}(x) \qquad (6)$$

Ceci implique directement :

$$\text{supp } \widetilde{f}_\alpha \subset \bigcup_{\alpha'} \text{supp } \widetilde{f}^{(p)}_{\alpha'} \qquad (7)$$

D'après l'hypothèse i) nous avons en outre :

$$\text{supp } \widetilde{f}^{(p)}_{\alpha'} \subset \{x \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : (x_{i_p} - x_{\alpha'(i_n)}) \in \overline{V}^+\} .$$

Par construction $\alpha'(i_n)$ est un élément de I^- choisi parmi les éléments $\{i_{p+1}, \ldots, i_n\}$. Nous pouvons donc écrire $\alpha'(i_n) = i_q$, $q > p$. Alors (7) devient :

$$\text{supp } \widetilde{f}_\alpha \subset \bigcup_{\substack{i_q \in I^- \\ q > p}} \{x \in \mathbb{R}^{4(n-1)} \ (x_{i_p} - x_{i_q}) \in \overline{V}^+\} \qquad \forall\, i_p \in I^+ \setminus \{i_n\}$$

iii) Si l'on choisit de même un élément $i_p \in I^-$, un raisonnement similaire entraîne facilement

$$\text{supp } \widetilde{f}_\alpha \subset \bigcup_{\substack{i_q \in I^+ \\ q > p}} \{x \in \mathbb{R}^{4(n-1)} (x_{i_q} - x_{i_p}) \in \overline{V}^+\} \qquad \forall\, i_p \in I^-$$

Finalement nous pouvons rassembler les deux dernières informations et écrire :

$$\text{supp } \widetilde{f}_\alpha \subset \bigcap_{\substack{i_p \in I^\pm \\ p \neq n}} \bigcup_{\substack{i_q \in I^\mp \\ q > p}} \{x \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : (x_{i_p} - x_{i_q}) \in \overline{V}^\pm\} \qquad (8)$$

iv) Intervertissons maintenant intersection et réunion : nous obtenons que le support de $\widetilde{f}_\alpha$ est contenu dans la réunion d'un certain nombre de cônes obtenus de la façon suivante : à chaque élément $i_p \in I^+$ (resp. $i_p \in I^-$) associer un élément $i_q \in I^-$ (resp. $i_q \in I^+$) apparaissant plus <u>à droite</u> dans l'écriture de R_α. C'est-à-dire, constituer des lignes $\times\!\!-\!\!\bullet$ (resp. $\bullet\!\!-\!\!\times$) $i_p \quad i_q$ $\quad i_p \quad i_q$

de telle sorte que (on le vérifie facilement) leur ensemble forme un arbre $t_\beta \in T^{(n)}_{I^+I^-}$. L'intersection des conditions $(x_{i_p} - x_{i_q}) \in \overline{V}^+$ (resp. $\overline{V}^-$) associée

à chacune de ces lignes constitue précisément le cône $\widetilde{C}_\beta$ associé à t_β.

Reste à prouver que les cônes $\widetilde{C}_\beta$ qui interviennent ici sont ceux dont le coefficient $k_{\alpha\beta}$ est non nul dans le développement

$$\ell(R_\alpha) = (-1)^{n-} \sum_\beta k_{\alpha\beta}\, t_\beta \qquad (3\,b)$$

Explicitons pour cela la construction par récurrence de $\ell(R_\alpha)$.
Soit

$$\mu_p = [A_{i_p}\downarrow\uparrow, [A_{i_{p+1}}\downarrow\uparrow, [\ldots[A_{i_{n-1}}\downarrow, A_{i_n}\uparrow]\ldots]]]$$

et supposons que l'on ait construit

$$\ell(\mu_p) = \sum_\beta k^p_\beta\, t^p_\beta \in \Sigma^{(n-p+1)}$$

où les arbres t^p_β ont pour sommets les indices $\{i_p, i_{p+1}, \ldots, i_n\}$. Considérons

$$\mu_{p-1} = [A_{i_{p-1}}\downarrow\uparrow, [A_{i_p}\downarrow\uparrow, [\ldots[A_{i_{n-1}}\downarrow, A_{i_n}\uparrow]\ldots]]] = [A_{i_{p-1}}\downarrow\uparrow, \mu_p]$$

Par définition de l'homomorphisme d'algèbres de Lie ℓ, on a :

$$\ell(\mu_{p-1}) = [\ell(A_{i_{p-1}}\downarrow\uparrow), \ell(\mu_p)] = \sum_\beta k^p_\beta\, [\ell(A_{i_{p-1}}\downarrow\uparrow),\ t^p_\beta]$$

Si par exemple $i_{p-1} \in I^+$, il vient :

$$\ell(\mu_{p-1}) = \sum_\beta k^p_\beta \sum_h$$

i_{p-1} h $\quad t^p_\beta$

où la sommation s'étend à tous les sommets h de l'arbre t^p_β dont le type est opposé à i_{p-1} (ici $\downarrow$), c'est-à-dire à tous les indices de type opposé à i_{p-1} apparaissant à sa droite dans l'écriture de R_α.
Par récurrence sur p, ceci prouve que l'ensemble des cônes $\widetilde{C}_\beta$ dont le coefficient $k_{\alpha\beta}$ est non nul dans (3 b) coïncide avec ceux qui interviennent dans la relation (8). q.e.d.

II.3. PREUVE DU LEMME.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le Lemme 4 de la Première Partie, énoncé sans démonstration.

Par hypothèse, à chaque dérivation de la famille $\{R_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ est associée une fonction $f_\lambda(k)$ analytique dans le tube T_λ de base $\gamma_\lambda \otimes V^+$. Il s'agit de prolonger chacune de ces fonctions dans le tube $\mathcal{T}_\lambda \supseteq T_\lambda$ en utilisant les relations de Steinmann satisfaites par les diverses valeurs au bord $\{f_\lambda(p), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$.

Considérons l'ensemble des fonctions $f_\alpha(k)$ associées aux monômes emboîtés R_α. Nous savons (Proposition I.2 rappelée en II.1) que la cellule γ_α est simpliciale et donc (voir [4]) que $T_\alpha = \mathcal{T}_\alpha$.♦
Rappelons également (Proposition II.1) que pour tout $\lambda \in \Lambda^{(n)}$ il existe une suite de coefficients $k_{\lambda\beta}$ non nuls tels que :

$$\ell(R_\lambda) = (-1)^{n-} \sum_\beta k_{\lambda\beta}\, t_\beta \qquad (3a)$$

On vérifie alors facilement [2] que $\mathcal{T}_\lambda$ n'est autre que le tube de base $\bigcap_{\beta;k_{\lambda\beta}=1} C_\beta$ et qu'en particulier

$$\gamma_\alpha \otimes V^+ = \bigcap_{\beta;k_{\alpha\beta}=1} C_\beta \qquad (9)$$

La démonstration du lemme repose sur l'idée suivante : si à chaque arbre t_β, on peut associer une fonction g_β analytique dans le tube de base C_β, alors la fonction

$$F_\lambda(k) = (-1)^{n-} \sum_\beta k_{\lambda\beta}\, g_\beta(k)$$

est analytique dans $\mathcal{T}_\lambda = \bigcap_{\beta;k_{\lambda\beta}=1} C_\beta$.

On va utiliser la propriété classique de la transformation de Laplace : si une distribution $\widetilde{f}(x)$ a son support contenu dans le cône $\widetilde{C}$, sa transformée

---

♦ Sinon $T_\lambda \subset \mathcal{T}_\lambda$.

de Fourier-Laplace

$$F(k) = \int e^{ikx} \widetilde{f}(x)\, dx$$

est analytique dans le tube de base C (dual de $\widetilde{C}$).

Considérons maintenant la fonction $f_\alpha(k)$ associée au monôme R_α, $\forall \alpha$. Sa transformée de Fourier-Laplace $\widetilde{f}_\alpha(x)$ est une distribution à support dans le dual de $\gamma_\alpha \otimes V^+$, c'est-à-dire (relation (9)) dans le cône $\left[\bigcup_{\beta; k_{\alpha\beta}=1} \widetilde{C}_\beta \right]^c$, où A^c désigne l'enveloppe convexe de A.
On vérifie immédiatement que ce support satisfait aux conditions d'application du Théorème II.1 et on peut conclure :

$$\text{supp } \widetilde{f}_\alpha \subset \bigcup_{\beta; k_{\alpha\beta}=1} \widetilde{C}_\beta$$

Les conditions d'application de la Proposition II.2 sont alors réunies : à chaque arbre t_β on peut associer une distribution $\widetilde{g}_\beta(x)$ à support dans $\widetilde{C}_\beta$ telle que

$$\widetilde{f}_\alpha(x) = (-1)^{n-} \sum_\beta k_{\alpha\beta}\, \widetilde{g}_\beta(x) \qquad (4)$$

Alors à chaque arbre t_β on peut associer une fonction g_β analytique dans le tube de base C_β, qui est la transformée de Fourier-Laplace de $\widetilde{g}_\beta(x)$ et l'on a

$$f_\alpha(k) = (-1)^{n-} \sum_\beta k_{\alpha\beta}\, g_\beta(k)$$

A chaque dérivation R_λ associons alors la fonction

$$F_\lambda(k) = (-1)^{n-} \sum_\beta k_{\lambda\beta}\, g_\beta(k)$$

où les coefficients $k_{\lambda\beta}$ sont ceux de (3 a).
F_λ est analytique dans le tube de base $\bigcap_{\beta; k_{\lambda\beta}=1} C_\beta$, c'est-à-dire $\mathcal{T}_\lambda$.

Montrons qu'elle y prolonge f_λ.
Il suffit pour cela de montrer que leurs valeurs au bord réelles coïncident

(on applique ensuite le théorème edge of the wedge), c'est-à-dire que

$$f_\lambda(p) = (-1)^{n-} \sum_\beta k_{\lambda\beta}\, g_\beta(p)$$

Mais c'est évident puisque d'une part $f_\lambda(p)$ s'exprime en fonction des $f_\alpha(p)$ par les relations de Steinmann, et que d'autre part au vu de la Proposition II.2 les distributions $g_\beta(p)$ "résolvent" identiquement ce système. q.e.d.

II.4. REMARQUES SUR LA STRUCTURE PRIMITIVE.

A la section 2.4 de la Première Partie nous avons donné de la structure primitive des fonctions de n points générales une définition en termes d'analyticité dans l'espace complexe des impulsions. Rappelons la rapidement. Une fonction de n points générale F c'est la donnée dans chaque tube $\mathcal{T}_\lambda$ de la famille $\{\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ d'une fonction F_λ analytique et à croissance lente dans $\mathcal{T}_\lambda$ de telle sorte que les distributions tempérées valeurs au bord $\{F_\lambda(p), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ satisfassent les deux conditions :

1) satisfaire le système linéaire des relations de Steinmann.

2) coïncidence de toutes les valeurs au bord adjacentes $F_{\lambda_1}(p)$ et $F_{\lambda_2}(p)$ dans une région réelle $R_I = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : p_I^2 < M_I^2,\ p_I^2 \neq m_I^2\}$.

Le théorème II.1 et la transformation de Laplace nous permettent d'en donner maintenant une définition dans l'espace réel des positions en termes de propriétés de support.

Une fonction de n points générale c'est alors la donnée d'une famille de distributions tempérées $\{\widetilde{F}_\lambda(x),\ \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ satisfaisant les conditions 1) et 2) et la contrainte de support :

$$\forall\, \lambda \in \Lambda^{(n)} \qquad \operatorname{supp} \widetilde{F}_\lambda \subset \bigcup_{\beta;\, k_{\lambda\beta}=1} \widetilde{C}_\beta$$

où les coefficients $k_{\lambda\beta}$ sont ceux de la relation (3a).

Le Théorème II.1 joue ici un rôle fondamental. Comme on l'a vu ci-dessus, la transformation de Fourier-Laplace est en effet incapable de dégager les cônes $\widetilde{C}_\beta$ de l'enveloppe convexe de leur réunion. Il montre que dans l'espace des positions, toute fonction de n points générale définit un ensemble de distributions ayant les mêmes supports que les distributions retardées généralisées d'un champ local.

APPENDICE III

Dans la Première Partie on a utilisé sans démonstration le Lemme 2 (énoncé page 206) qui établit pour les fonctions de n points générales la propriété d'analyticité locale suivante :

Lemme

Toute fonction de n points générale est analytique à tous les point frontières des tubes $\{\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ qui n'appartiennent pas à la réunion de la famille d'ensembles $\{\Delta_I, I \in \mathcal{P}^*(X)\}$ ainsi définis :

$$\Delta_I \equiv \Delta_{X\setminus I} = \{k \in \mathbb{C}^{4(n-1)} : k_I^2 = m_I^2\} \cup \{k \in \mathbb{C}^{4(n-1)} : k_I^2 = M_I^2 + \rho,\ \rho \geq 0\}$$

où m_I et M_I sont les masses associées à la partition $(I, X\setminus I)$ par les relations de coïncidence.

Remarquons qu'étant donné un tube $\mathcal{T}_\lambda$ défini par :

$$\mathcal{T}_\lambda = \{k = p + iq \in \mathbb{C}^{4(n-1)} \quad \lambda(I) q_I \in V^+ \quad \forall\ I \in \mathcal{P}^*(X)\} \qquad (10)$$

on obtient ses points frontières les plus généraux en remplaçant dans (10) une ou plusieurs des conditions $\in V^+$ par $\in C^+$ ou $= 0$ (ici $C^+ = \{p \in \mathbb{R}^4 : p^2 = 0$ $p^0 > 0\}$ désigne l'ensemble des points futurs du genre lumière).

Dans la Première Partie nous n'avons eu besoin que de l' analyticité aux points frontières obtenus en remplaçant une au moins des conditions $q_I \in V^\pm$ par $q_I = 0$. Nous ne prouverons donc le lemme qu'en ces points frontières particuliers.

La preuve de l'analyticité aux points frontières les plus généraux s'obtiendrait par des méthodes tout à fait similaires. Elle est cependant plus complexe et nécessite que les masses du problème satisfassent

certaines conditions de stabilité (pour la preuve dans le cas n=4 voir la Ref [6]).

Nous allons utiliser le théorème suivant dit "de la continuité spéciale" du à Bremermann [3,5,6] :

Théorème

Considérons dans $\mathbb{C}^N$ un chemin continu $z = z(t)$ dans une variété linéaire à une dimension : $z(t) = a+b\,u(t)$ avec $a,b \in \mathbb{C}^N$ et $u(t)$ une fonction à valeurs complexes continue pour $0 \leqslant t \leq 1$. Considérons un domaine $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}^{N+1}$ contenant pour $0 < t \leq 1$ le disque $\{z = z(t) \in \mathbb{C}^N,\ |\xi| < \rho\}$ où ρ est un nombre réel positif.

Alors si $\mathcal{D}$ contient aussi le point $\{z = z(0),\ \xi = 0\}$, l'enveloppe d'holomorphie de $\mathcal{D}$ contient le disque $\{z = z(0),\ |\xi| < \rho\}$ tout entier.

Ce théorème s'étend au cas où le disque $|\xi| < \rho$ (resp. le point $\xi = 0$) est remplacé par n'importe quel domaine Δ du plan complexe ξ (resp. par n'importe quel point $M \in \Delta$).

Considérons alors les points frontières des tubes appartenant à une "face" du type :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{J}} = \{k \in \mathbb{C}^{4(n-1)} : q_I = 0,\ \forall\ I \in \mathcal{J}\ ;\ \varepsilon_I q_I \in V^+,\ \forall\ I \notin \mathcal{J}\}$$

où $\mathcal{J}$ est un sous-ensemble (non vide) de $\mathcal{P}^*(X)$ et où le choix des signes $\{\varepsilon_I, I \notin \mathcal{J}\}$ est un choix compatible. La preuve du lemme en ces points a lieu en deux étapes.

i) Nous démontrons d'abord que les points de la face $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ appartiennent à l'enveloppe convexe de tous les tubes $\mathcal{T}_\lambda$ dont ils sont points frontières.

Considérons pour cela l'espace $\mathbb{R}^{n-1}$ de la variable $s = (s_1, \ldots, s_n)$ avec $s_X = 0$ (introduit page 191) et une triangulation de cet espace par les seuls plans $\{s_I = 0,\ I \notin \mathcal{J}\}$. Le choix des signes $\{\varepsilon_I, I \notin \mathcal{J}\}$ détermine un cône convexe unique dans cette triangulation. Ce cône contient au moins deux cellules de la famille $\{\gamma_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ puisque $\mathcal{J}$ n'est pas vide. L'ensemble $\{\gamma_\lambda, \lambda \in \Lambda_{\mathcal{J}}\}$ des cellules ainsi déterminées définit l'ensemble des tubes $\{\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda_{\mathcal{J}}\}$ dont les points de $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ sont des points frontières.

Nous choisissons l'un quelconque de ceux-ci que nous désignons par $\mathcal{T}_{\lambda_+}$. Outre le choix des signes $\{\varepsilon_I, I \notin \mathcal{I}\}$, γ_{λ_+} est définie par un choix compatible de signes pour $\{s_I, I \in \mathcal{I}\}$. Le choix exactement opposé est encore compatible* et définit un autre tube $\mathcal{T}_{\lambda_-}$ dans la famille $\{\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda_{\mathcal{I}}\}$.

Alors il est clair que la face $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ appartient à l'enveloppe convexe de $\mathcal{T}_{\lambda_+} \cup \mathcal{T}_{\lambda_-}$ et, a fortiori, à l'enveloppe convexe de la réunion de la famille $\{\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda_{\mathcal{I}}\}$.

ii) Considérons ensuite un point $\hat{k} = \hat{p} + i\hat{q} \in \mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ au dehors de $\bigcup_{I \in \mathcal{P}^*(X)} \Delta_I$. Il est clair que cela implique pour sa partie réelle $\hat{p}$ l'appartenance à la région R ainsi définie :

$$R = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : p_I^2 \neq m_I^2, \quad p_I^2 < M_I^2, \quad \forall I \in \mathcal{I}\}$$

R est précisément la région "edge of the wedge" de la famille de tubes $\{\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda_{\mathcal{I}}\}$.

De manière à appliquer le théorème de Bremermann, considérons la famille $\{\mathcal{L}(t), 0 \leq t \leq 1\}$ de variétés linéaires à une dimension ainsi définies :

$$\mathcal{L}(t) = \{k \in \mathbb{C}^{4(n-1)} : k = k(t,\xi), \ \xi \in \mathbb{C}\}$$

et

$$k(t,\xi) = \hat{p} + \xi\hat{q} + i\varepsilon t$$

où ε est un vecteur fixe de $\mathbb{R}^{4(n-1)}$ choisi dans la base du tube $\mathcal{T}_{\lambda_+}$. Le point $\hat{k} = \hat{p} + i\hat{q}$ est obtenu pour $t = 0$ et $\xi = i$. De plus pour $0 < t \leq 1$ et $\mathrm{Im}\ \xi > 0$, le point $k(t,\xi)$ appartient à $\mathcal{T}_{\lambda_+}$: en effet, la base de ce tube (non nécessairement simpliciale) est convexe.

Démontrons que lorsque $t = 0$, il existe un semi-cercle

$$\gamma = \{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi| < r, \ \mathrm{Im}\ \xi > 0\}$$

dont l'image appartient au domaine d'analyticité de la fonction de n points considérée.

---

*Comme on le vérifie facilement par continuité.

D'abord commme $\hat{p} \in R$ il existe un voisinage d'analyticité $\mathfrak{N}(\hat{p})$ qui est l'intersection d'un voisinage complexe de $\hat{p}$ avec l'enveloppe convexe de la famille $\{\mathcal{T}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda_{\mathcal{J}}\}$. Ensuite les points $k(t=0\,;\ \xi : \mathrm{Im}\ \xi > 0)$ appartiennent à $\mathcal{J}_{\mathcal{J}}$ et donc (voir i)) à cette enveloppe convexe. La section de $\mathfrak{N}(\hat{p})$ par la variété linéaire $\mathcal{L}(0)$ contient donc le semi-cercle γ.

Les conditions d'utilisation de la version étendue du théorème de Bremermann sont alors réunies : on prend $u(t) = t$ et $\Delta = \{\xi \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ \xi > 0\}$; on choisit $M \in \gamma$. Alors tous les points $k(t = 0\,;\ \xi : \mathrm{Im}\ \xi > 0\}$ appartiennent à l'enveloppe d'holomorphie de la fonction considérée et en particulier $k(t = 0,\ \xi = i)$, c'est-à-dire le point $\hat{k} \in \mathcal{J}_{\mathcal{J}}$ considéré. q.e.d.

APPENDICE IV

Dans cet appendice nous présentons une procédure bien connue de régularisation des fonctions de n points. Dans certaines démonstrations de la Première Partie (Propositions 13 et 15) elle permet d'établir des résultats au sens des distributions en se plaçant dans l'hypothèse simplificatrice où les fonctions de n points admettent des valeurs au bord C^∞ sur toute la frontière de leur domaine.

Nous allons utiliser le théorème suivant [7,8] qui est une variante immédiate du théorème fondamental assurant l'équivalence entre la croissance lente d'une fonction analytique dans un tube et le caractère distribution de ses valeurs au bord.

Théorème

Considérons une fonction F(k) analytique dans un tube local de $\mathbb{C}^{4n}$ $\mathcal{T} = \Omega + i\mathcal{C}$ où Ω (resp. $\mathcal{C}$) est un ouvert (resp. un cône ouvert) de $\mathbb{R}^{4n}$. Choisissons une direction de temps $\hat{\ell} \in V^+$ et le référentiel associé $k = (\vec{k}, k^o)$. Supposons $\mathcal{C} \cap \mathbb{R}^n_{(k_o)} \neq \emptyset$.

Alors si la fonction F est à croissance lente dans $\mathcal{T}$ près de sa frontière, c'est-à-dire y satisfait la borne :

$$|F(p+iq)| \leq C_K \left(1 + \frac{1}{d(q, \partial\mathcal{C})}\right)^M$$

où C_K est une constante positive qui dépend d'un compact K dans l'espace $\mathbb{R}^{4n}$ de la variable p, et $d(q, \partial\mathcal{C})$ représente la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^{4n}$ du point q au bord $\partial\mathcal{C}$ du cône $\mathcal{C}$,

il est équivalent de dire que toutes les régularisées

$$F_{\varphi}(\vec{p} + i\vec{q},\ p^o + iq^o) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\vec{p} + i\vec{q},\ p'^o + iq^o)\ \varphi(p^o - p'^o)\ dp'^o$$

par des fonctions $\varphi(p^o) \in \mathcal{D}$ ($|p^o| < a$), a suffisamment petit, sont analytiques dans $\mathcal{T}$ et possèdent des valeurs au bord C^∞ en tout point $p \in \Omega_a = \{(\vec{p}, p^o) \in \Omega : (\vec{p}, p^o \pm a) \in \Omega\}$.

En d'autres termes, la distribution F(p) régularisée dans les seules directions du genre temps devient C^∞ dans toutes les variables.

Dans la Première Partie, pour s'affranchir du caractère distribution des valeurs au bord considérées il suffit alors de prouver le résultat simple suivant. Considérons la définition par récurrence du produit de convolution H^G associé à un graphe G (page 209) :

$$(11)\quad H^G(\vec{p}, p^o + i q^o) = \int_{\Gamma(\vec{p}, p^o + iq^o)} \tilde{H}^G_\pi(\vec{p}, p^o + iq^o\ ;\ \vec{u}, t^o)\,[H^{(2)}(\vec{u}, t^o)]^{-1} d\vec{u}\ dt^o$$

et démontrons la

Proposition

A toute fonction $\varphi(p^o)$ régularisante pour H^G on peut associer une fonction $\Phi(p^o\ ;\ u^o)$ régularisante pour l'intégrand de (11) telle que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^G_\pi\,[H^{(2)}]^{-1} & \longrightarrow & H^G \\ \Phi\text{-régularisation} \downarrow & \text{intégration} & \downarrow \varphi\text{-régularisation} \\ [\tilde{H}^G_\pi\,[H^{(2)}]^{-1}]_\Phi & \longrightarrow & H^G_\varphi \\ & \text{intégration} & \end{array}$$

Preuve :

Il faut montrer l'égalité des deux expressions suivantes :

$$H^G_\varphi(\vec{p}, p^o + iq^o) = \int \varphi(p^o - p'^o)\ dp'^o \int_{\Gamma(\vec{p}, p'^o + iq^o)} \tilde{H}^G_\pi(\vec{p}, p'^o + iq^o\ ;\ \vec{u}, t^o)\,[H^{(2)}(u, t^o)]^{-1} d\vec{u}\ dt^o$$

$$\int_{\Gamma(\vec{p},p^o+iq^o)} d\vec{u}dt^o \int \tilde{H}^{G}_{\pi}(\vec{p},p'^o+iq^o\ ;\ \vec{u},t^o+(u^o-u'^o))\,[H^{(2)}(\vec{u},t^o+(u^o-u'^o))]^{-1}\,\Phi(p^o-p'^o;u^o-u'^o)\,dp'^o_o\,du'^o_o$$

où une fois fixée $\varphi(p^o) \in \mathcal{D}(|p^o| < a)$, a suffisamment petit, $\Phi(p^o,u^o)$ peut être choisie de la forme $\Phi(p^o;u^o) = \varphi(p^o)\ \chi(u^o)$ avec $\chi(u^o) \in \mathcal{D}(|u^o| < b)$ b suffisamment petit et $\int \chi(u^o)\ du^o = 1$. C'est alors une conséquence directe de la géométrie des contours $\Gamma(k)$ (donnée page 209) et de la possibilité que nous avons de leur faire subir de suffisamment petites déformations continues.

La propriété ci-dessus permet alors d'effectuer la récurrence de la Première Partie sur des fonctions régularisées, ce qui d'après le théorème établit les résultats dans le cas général de valeurs au bord distributions.

APPENDICE V

Cet appendice est consacré à la preuve de la Proposition 15 énoncée page 213 sans démonstration.

Proposition

Les valeurs au bord réelles $\{H^G_{\lambda_{++}}(p), H^G_{\lambda_{+-}}(p), H^G_{\lambda_{--}}(p), H^G_{\lambda_{-+}}(p)\}$ associées à tout quatuor de tubes satisfont la relation à quatre

$$H^G_{\lambda_{++}}(p) + H^G_{\lambda_{--}}(p) = H^G_{\lambda_{+-}}(p) + H^G_{\lambda_{-+}}(p)$$

sur tous les réels au sens des distributions.

Nous allons établir ici un résultat un peu plus général dont ce sera une conséquence immédiate. Considérons deux cellules adjacentes γ_{λ_+} et γ_{λ_-} séparées par une partition $(I, X\backslash I)$ et les fonctions correspondantes $H^G_{\hat{e},\lambda_+}$ et $H^G_{\hat{e},\lambda_-}$ respectivement analytiques dans les tubes aplatis $\mathcal{T}_{\lambda_+} \cap V_{\hat{e}}$ et $\mathcal{T}_{\lambda_-} \cap V_{\hat{e}}$.

Désignons par $\gamma_{\lambda'}$ (resp. $\gamma_{\lambda''}$) la cellule associée dans $s_I = 0$ (resp. $s_{X\backslash I} = 0$) par la relation (2) de discontinuité de Ruelle

$$R_{\lambda_+} - R_{\lambda_-} = [R_{\lambda'}, R_{\lambda''}]$$

écrite dans l'algèbre abstraite de Steinmann.

La face commune aux tubes $\mathcal{T}_{\lambda_+} \cap V_{\hat{e}}$ et $\mathcal{T}_{\lambda_-} \cap V_{\hat{e}}$ est alors contenue dans le tube aplati $(p_I, \hat{k})$ où p_I est réel quelconque et $\hat{k}$ un point générique de $(\mathcal{T}_{\lambda'} \times \mathcal{T}_{\lambda''}) \cap V_{\hat{e}}$.

Considérons alors un point k_+ (resp. k_-) à l'intérieur de $\mathcal{T}_{\lambda_+} \cap V_{\hat{e}}$ (resp. $\mathcal{T}_{\lambda_-} \cap V_{\hat{e}}$) et choisissons k_+ et k_- symétriques par rapport à la face commune de ces tubes, c'est-à-dire k_+ (resp. k_-) avec $q_I^o = +\varepsilon$ (resp. $-\varepsilon$).

La croissance lente de $H^G_{\hat{e},\lambda_+}$ (resp. $H^G_{\hat{e},\lambda_-}$) à l'intérieur du tube $\mathcal{T}_{\lambda_+} \cap V_{\hat{e}}$ (resp. $\mathcal{T}_{\lambda_-} \cap V_{\hat{e}}$) permet alors de définir sur leur face commune la discontinuité

$$[H^G_{\hat{e},\lambda_+} - H^G_{\hat{e},\lambda_-}](k) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (k_-^+ \to k)}} [H^G_{\hat{e},\lambda_+}(k_+) - H^G_{\hat{e},\lambda_-}(k_-)]$$

Cette discontinuité est une distribution dans la variable p_I à valeurs analytiques dans la face commune à $\mathcal{T}_{\lambda_+} \cap V_{\hat{e}}$ et $\mathcal{T}_{\lambda_-} \cap V_{\hat{e}}$.

Alors la Proposition 15 sera démontrée si nous prouvons :

Proposition

La discontinuité $[H^G_{\hat{e},\lambda_+} - H^G_{\hat{e},\lambda_-}](k)$ ne dépend que des cellules induites $(\gamma_{\lambda'}, \gamma_{\lambda''})$. C'est une distribution dans la variable p_I qui prend ses valeurs dans les fonctions analytiques à l'intérieur du tube produit $(\mathcal{T}_{\lambda'} \times \mathcal{T}_{\lambda''}) \cap V_{\hat{e}}$.

Remarque

On la note alors $\Delta_{\lambda',\lambda''} H^G_{\hat{e}}(p_I, \hat{k})$. Il est facile de vérifier qu'étant donné un quatuor de cellules, le résultat ci-dessus implique la relation à

quatre

$$[H^G_{\hat{e},\lambda_{++}} - H^G_{\hat{e},\lambda_{-+}} + H^G_{\hat{e},\lambda_{--}} - H^G_{\hat{e},\lambda_{+-}}] (p_I, p_J, \hat{k}) = 0$$

en tout point $\hat{k}$ de l'arête $\{q^o_I = q^o_J = 0\}$. Il suffit alors de tendre vers les réels à l'intérieur de ce tube pour établir la Proposition 15.

Preuve :

Jusqu'à présent la dérivation des propriétés d'analyticité du G-produit $H^G_{\hat{e},\lambda}$ n'a nécessité que l'utilisation de celles du $\widetilde{G}$-produit $H^{\widetilde{G}}$ sur l'hyperplan analytique $k_{n+1} + k_{n+2} = 0$. Nous allons devoir désormais relâcher cette contrainte et utiliser l'analyticité de $H^{\widetilde{G}}$ dans tout l'espace ambiant $\mathbb{C}^{4(n+1)}$.

Plus précisément représentons sur la Figure 2 la projection dans l'espace des variables $\{q^o_I, q^o_{X\setminus I}, q^o_{n+1} + q^o_{n+2}\}$ des deux contours $\mathcal{L}(k_+)$ et $\mathcal{L}(k_-)$ utilisés dans la représentation donnée page 209 du G-produit :

$$H^G_{\hat{e},\lambda_\pm}(k_\pm) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathcal{L}(k_\pm)} H^{\widetilde{G}}(k_\pm, k_{n+1}, k_{n+2}) \Big|_{k_{n+1}=-k_{n+2}=t} [H^{(2)}(t)] \, dt \quad .$$

Nous introduisons un point auxiliaire k_o ainsi défini : sa projection sur $(\mathcal{T}_{\lambda'} \times \mathcal{T}_{\lambda''}) \cap V_{\hat{e}}$ est $(p_I, \hat{k})$ et nous choisissons $q^o_I = q^o_{X\setminus I} = +\varepsilon$. Clairement k_o n'est plus dans $\mathbb{C}^{4(n-1)}$ puisque $\sum_{i=1}^{n} q^o_i = 2\varepsilon$ en ce point.

A k_o nous faisons correspondre le contour $\mathcal{L}(k_o)$ dont la projection est représentée sur la Figure 2. $\mathcal{L}(k_o)$ est contenu dans l'hyperplan analytique $\Sigma = \{p_{n+1} + p_{n+2} = 0, \vec{q}_{n+1} + \vec{q}_{n+2} = 0, q^o_{n+1} + q^o_{n+2} = -2\varepsilon\}$ et se faufile à travers les singularités de l'intégrand $H^{\widetilde{G}}(k_o, k_{n+1}, k_{n+2})$ sur cet hyperplan.

Introduisons également

$$I(k_o) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathcal{L}(k_o)} H^{\widetilde{G}}(k_o, k_{n+1}, k_{n+2}) \Big|_{\Sigma} [H^{(2)}(k_{n+1})]^{-1} \, dk_{n+1}$$

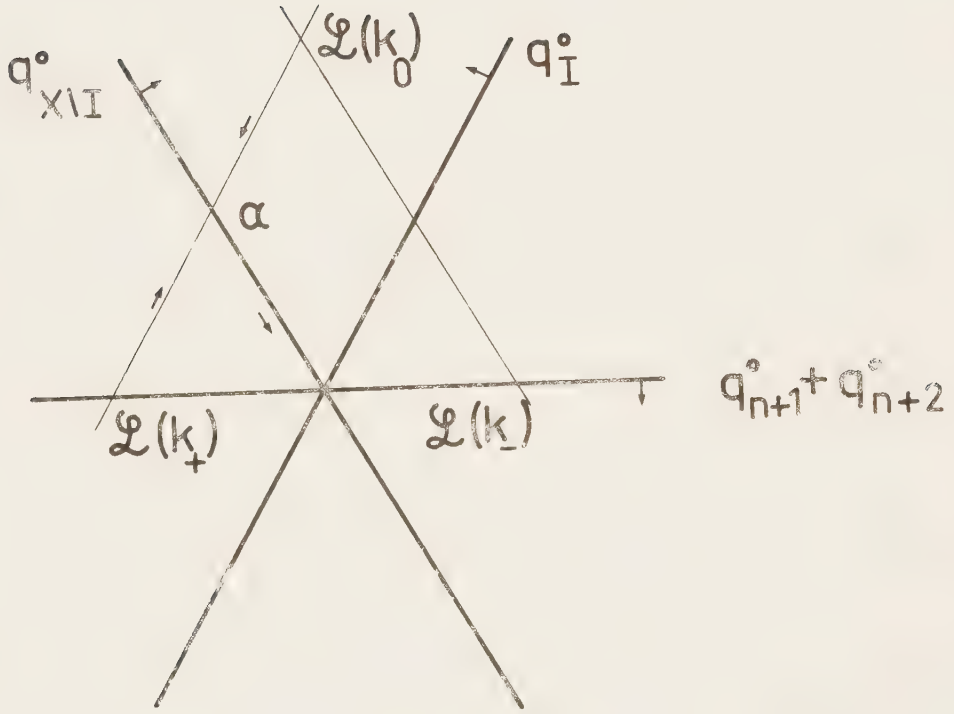

q°_{XII}
$\mathcal{L}(k_0)$
q°_{I}
α
$\mathcal{L}(k_+)$
$\mathcal{L}(k_-)$
$q^{\circ}_{n+1} + q^{\circ}_{n+2}$

FIG. 2

Alors nous pouvons évaluer la discontinuité $[H^G_{\hat{e},\lambda_+} - H^G_{\hat{e},\lambda_-}]$ par la relation :

$$[H^G_{\hat{e},\lambda_+} - H^G_{\hat{e},\lambda_-}](k) = \lim_{\varepsilon\to 0} [H^G_{\hat{e},\lambda_+}(k_+) - I(k_o)] + \lim_{\varepsilon\to 0} [I(k_o) - H^G_{\hat{e},\lambda_-}(k_-)]$$

et étudier chacun des termes séparément. Clairement il suffit de se restreindre au premier, le second s'en déduisant par simple transposition $I \leftrightarrow X\backslash I$.

Nous évaluons cette limite en deux étapes en écrivant :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} [H^G_{\hat{e},\lambda_+}(k_+) - I(k_o)] = \lim_{\varepsilon\to 0} \Big[\lim_{\varepsilon'\to 0} [H^G_{\hat{e},\lambda_+}(k_+) - I(k_o)] \Big]$$
$$q^o_{X\backslash I} = 0 \;\Big|\; q^o_{X\backslash I} = \varepsilon'$$
$$q^o_I = \varepsilon \qquad q^o_I = \varepsilon$$

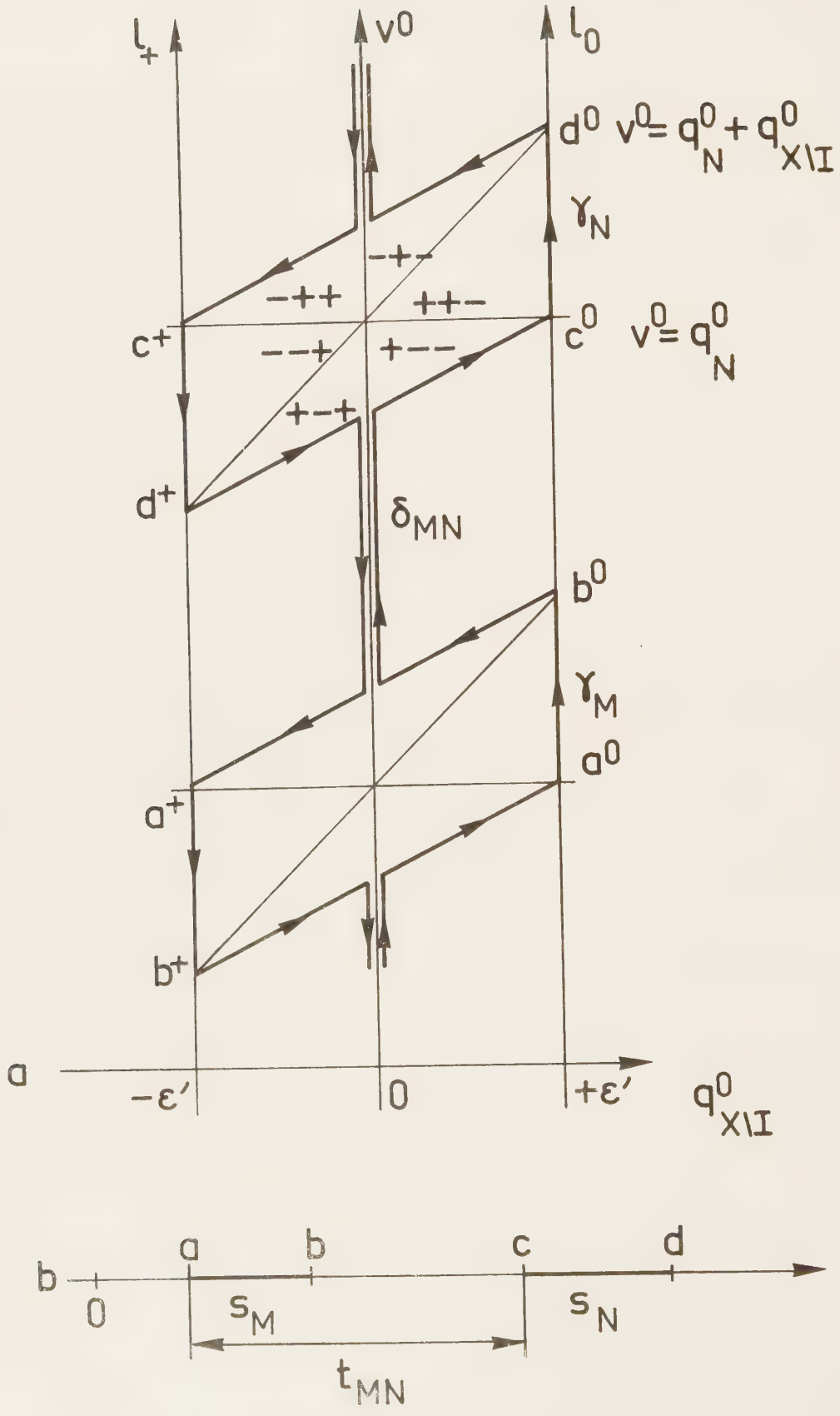
Analysons d'abord la situation à la limite $\{q^o_{X\backslash I} = 0,\ q^o_I = \varepsilon\}$ c'est-à-dire au point α représenté sur la Figure 2. Il est utile de représenter (Figure 3a) les deux contours limites $\mathcal{L}(k_+)$ et $\mathcal{L}(k_o)$ par leurs projections ℓ_+ et ℓ_o dans l'espace des variables $(q^o_{X\backslash I}, v^o)$. La Figure 3b représente leur projection commune sur l'espace u^o. (Nous posons $k^o_{n+1} = u^o + iv^o$). Les couples (a,a^+), (b,b^+) (resp. (a,a^o), (b,b^o)) définissent des points de $\mathcal{L}(k_+)$ (resp. $\mathcal{L}(k_o)$). Nous choisissons $\mathcal{L}(k_+)$ (resp. $\mathcal{L}(k_o)$) comme une ligne brisée définie en associant à chaque point de ℓ_+ (resp. ℓ_o) dans l'intervalle a^+b^+ (resp. $a^o\,b^o$) le barycentre correspondant sur ab.

Appliquons alors le théorème de Stokes. Il vient :

$$H^G_{\hat{e},\lambda_+}(k_+) - I(k_o) = \sum_{M\in\mathcal{P}(I)} \int_{\mathbb{R}^3\times\gamma_M} \tilde{H^G}(k,k_{n+1},k_{n+2}) \Big|_\sigma [H^{(2)}(k_{n+1})]^{-1}\, dk_{n+1} +$$

$$+ \sum_{M,N\in\mathcal{P}(I)} \int_{\mathbb{R}^3\times\delta_{MN}} \tilde{H^G}(k,k_{n+1},k_{n+2}) \Big|_\sigma [H^{(2)}(k_{n+1})]^{-1}\, dk_{n+1}$$

$$+ \rho(\varepsilon')$$


l+
v0
l0
d0 v0 = q0N + q0X\I
γN
-+-
-++
++-
c+
c0 v0 = q0N
--+
+--
+-+
d+
δMN
b0
γM
a0
a+
b+
a
-ε'
0
+ε'
q0X\I

b
a
b
c
d
0
sM
sN
tMN

FIG. 3

Ici quelques explications supplémentaires sont requises : $\rho(\varepsilon')$ est la contribution (nulle à la limite $\varepsilon'=0$) provenant de la différence des parties infinies des deux contours $\mathcal{L}(k_+)$ et $\mathcal{L}(k_o)$; σ est l'hyperplan analytique d'équation $\{p_{n+1} + p_{n+2} = 0,\ \vec{q}_{n+1} + \vec{q}_{n+2} = 0,\ q^o_I = \varepsilon\}$. $\mathcal{P}(I)$ représente l'ensemble des parties de I. γ_M est le cycle dont la projection sur l'espace $(q^o_{X\setminus I}, v^o)$ représentée sur la Figure 3a est limitée par les droites $v^o = q^o_M$ et $v^o = q^o_M + q^o_{X\setminus I}$. Finalement δ_{MN} relie deux cycles <u>consécutifs</u> γ_M et γ_N comme décrit sur la Figure 3a .

On a ici utilisé le fait qu'à la limite $q^o_{X\setminus I} = 0$, les contours $\mathcal{L}(k_+)$ et $\mathcal{L}(k_o)$ sont pincés entre les couples de coupures $(\hat{\Sigma}_M, \hat{\Sigma}_{M\cup(X\setminus I)})$ pour tout $M \in \mathcal{P}(I)$*. Chaque cycle γ_M représente la contribution du pincement entre $\hat{\Sigma}_M$ et $\hat{\Sigma}_{M\cup(X\setminus I)}$ et entoure l'arête $v^o = q^o_M = q^o_{M\cup(X\setminus I)}$. Celle-ci n'est autre que la <u>trace</u> dans l'hyperplan σ de l'arête commune à un <u>sextet</u> de tubes associé à la partition suivante de $X \cup \{n+1,n+2\}$ en trois éléments : $[M\cup\{n+2\}\ ;\ X\setminus I\ ;\ (I\setminus M)\cup\{n+1\}]$. Nous représentons par

$$\{H^{\tilde{G}}_{++-},\ H^{\tilde{G}}_{-+-},\ H^{\tilde{G}}_{-++},\ H^{\tilde{G}}_{--+},\ H^{\tilde{G}}_{+-+},\ H^{\tilde{G}}_{+--}\}$$

les six branches de $H^{\tilde{G}}$ associées à chaque tube de ce sextet (voir Fig. 3a).

Quand $q^o_{X\setminus I}$ tend vers zéro, le cycle γ_M s'évanouit et nous sommes réduits à intégrer sur le segment réel s_M correspondant la contribution

$$\Delta_M H^{\tilde{G}} = [H^{\tilde{G}}_{++-} - H^{\tilde{G}}_{-+-} + H^{\tilde{G}}_{--+} - H^{\tilde{G}}_{+-+}] \Big|_\sigma$$

qui est une des trois doubles discontinuités associées au sextet de tubes considéré.

De même la contribution du cycle δ_{MN} se réduit à l'intégrale sur une ligne $\mathcal{L}_{MN}$ du plan complexe (ayant pour projection sur l'espace u^o le segment t_{MN} de la Figure 3b) de la discontinuité

$$\Delta_{MN} H^{\tilde{G}} = (H^{\tilde{G}}_+ - H^{\tilde{G}}_-) \Big|_\sigma$$

---

*A cause des relations de Steinmann, les autres coupures n'interviennent pas.

où le couple (H^G_+, H^G_-) représente deux branches adjacentes de $H^{\widetilde{G}}$ séparées par la face $q^o_{X\setminus I} = q^o_I + q^o_{n+1} + q^o_{n+2} = 0$.

Finalement nous pouvons écrire :

$$\lim_{\substack{\varepsilon'\to 0 \\ |q^o_{X\setminus I}| = \varepsilon' \\ q^o_I = \varepsilon}} [H^G_{\hat{e},\lambda_+}(k_+) - I(k_o)] = \sum_{M\in\mathcal{P}(I)} \int_{\mathbb{R}^3\times S_M} \Delta_M H^{\widetilde{G}}(k,u,-u)\,[H^{(2)}(u)]^{-1}\,du + \sum_{M,N\in\mathcal{P}(I)} \int_{\mathbb{R}^3\times \mathcal{L}_{MN}} \Delta_{MN} H^{\widetilde{G}}(k,k_{n+1},k_{n+2})[H^{(2)}(k_{n+1})]^{-1} dk_{n+1} \qquad (12)$$

Examinons les propriétés d'analyticité des diverses contributions : $\Delta_M H^{\widetilde{G}}$ est une double discontinuité de fonction de (n+2) points générale associée à un sextet de tubes : c'est une distribution dans les variables $(p_{n+1} - p_M)$ et p_I à valeurs analytiques dans l'arête $v^o - q^o_M = q^o_{X\setminus I} = 0$. (Au vu de l'appendice IV, la sommation dans (12) est licite au sens des distributions). $\Delta_{MN} H^{\widetilde{G}}$ est une distribution en p_I à valeurs analytiques dans la face $q^o_{X\setminus I} = 0$, plus précisément dans le tube $\mathcal{T}_{\lambda''} \cap V_{\hat{e}}$ de cette face.

Dès lors nous pouvons conclure : on vérifie en effet facilement que ces propriétés d'analyticité impliquent pour le membre de gauche de (12) l'analyticité dans le tube aplati $(\mathcal{T}_{\hat{\lambda}'} \times \mathcal{T}_{\lambda''}) \cap V_{\hat{e}}$, où $\gamma_{\hat{\lambda}'}$ représente une cellule de $\mathbb{R}^{|I|}$ obtenue dans l'espace des $|I|$ variables indépendantes $\{q^o_i, i\in I\}$ en choisissant $q^o_I = \varepsilon > 0$ et $\{q^o_i, i\in I\}$ dans $\gamma_{\lambda'}$.

Il suffit alors de faire tendre ε vers zéro pour conclure à l'analyticité de $\lim_{\varepsilon\to 0} [H^G_{\hat{e},\lambda_+}(k_+) - I(k_o)]$ dans le tube aplati $(\mathcal{T}_{\lambda'} \times \mathcal{T}_{\lambda''}) \cap V_{\hat{e}}$. Des considérations similaires pour $\lim_{\varepsilon\to 0} [I(k_o) - H^G_{\hat{e},\lambda_-}(k_-)]$ achèvent alors la preuve de la proposition.

REFERENCES

[1] Ruelle, D. : non publié

[2] Bros, J. : Thèse (Paris, 1970)

[3] Epstein, H. : in Axiomatic Field Theory, Vol. 1. Gordon and Breach. (1965)

[4] Araki, H. : J. Math. Phys. 2, 163 (1961)

[5] Bremermann, H. : Thesis, Schrift. Math. Inst. Univ. Münster, 5 (1951)

[6] Bros, J., Epstein, H., Glaser, V. : Nuovo Cimento 31, 1265 (1964)

[7] Streater, R.F., Wightman, A.S. : P.C.T., Spin-Statistics and All that. Benjamin (1964)

[8] Bros, J., Epstein, H., Glaser, V. : Helv. Phys. Acta 45, 149 (1972)

[9] Epstein, H. : Communication privée.

T R O I S I E M E P A R T I E

STRUCTURE A UNE PARTICULE DES FONCTIONS DE n POINTS

ANALYTICITY PROPERTIES AND MANY-PARTICLE STRUCTURE IN GENERAL QUANTUM FIELD THEORY
II. ONE-PARTICLE IRREDUCIBLE N-POINT FUNCTIONS

by

J. BROS and M. LASSALLE

ABSTRACT

The extraction of one-particle singularities from the n-point functions is performed in the framework of L.S.Z field theory in the case of a single massive scalar field. It is proved that the "one-particle irreducible" functions thus obtained enjoy the analytic and algebraic primitive structure of general n-point functions (up to a finite number of generalized C.D.D. singularities). Finally under an additional technical assumption, it is shown that the Glaser-Lehmann-Zimmermann relations stating the completeness of asymptotic states yield similar relations satisfied in any given channel by the corresponding one-particle irreducible functions.

I. INTRODUCTION.

In the first paper of this series[1] and in a previous work[2], we described a general method for investigating the analyticity properties of the n-point Green's functions implied by the non-linear structure of general quantum field theory.

This non-linear program makes use conjointly of the rigorous results of the linear program expressed in complex momentum space, and of the many-particle structure analysis (M.P.S.A) due to Symanzik[3] where an essential role is played by the notion of p-particle irreducible (p.i.) part of a Green's function.

The advantage for a synthesis of these two approaches is twofold. On one hand the M.P.S.A. program can be carried out there on a rather rigorous level since it can be developped in the framework of the analyticity properties of Green's functions which is well-established in the L.S.Z. field theory[5-7]. Then it is expected that (apart from certain technical postulates which have to be added to the axioms of the theory) the introduction of irreducible n-point functions can be made rigorous in complex momentum space and that their analytic structure can be clearly exhibited (except for the possible occurence of generalized C.D.D. poles as explained in the following).

On the other hand the use of the non-linear information of field theory, expressed through the completeness relations of Glaser, Lehmann and Zimmermann [8], should lead in the M.P.S.A. context to important improvements in the knowledge of the global analytic structure of the n-point functions. Actually the rigorous introduction of the irreducible functions in axiomatic field theory seems to enrich the latter by a powerful algorithm which is borrowed from the perturbative approach[3].

This paper is devoted to the study of the first and simplest case p = 1, namely to the extraction of one-particle singularities from the n-point functions of a local field.

This had been already performed by Zimmermann in his work on time-ordered Green's functions[4]. Our construction of the one-p.i. functions (with respect to one channel and to all channels) can be considered as the incorporation of the ideas of[3,4] in the Steinmann-Ruelle-Araki framework of the analyticity properties of the n-point functions (which was not at that time completely analysed). Such a point of view had been already adopted by Völkel and results obtained in the case n = 4[9].

For the sake of simplicity, we consider the case of a single Bose self-interacting field describing massive scalar particles. On the basis of the Wightman axioms[10,11] supplemented by the convenient postulate that "sharp" retarded operators should exist[7], a set of one p.i. n-point functions can be constructed. They are proved to enjoy the same analytic and linear algebraic structure as the complete n-point functions, with additional analyticity properties on appropriate polar manifolds of the latter. The proof makes use of the conservation of the primitive structure of n-point functions by G-convolution in the simplest case of tree-products[1].

It is clear that this procedure cannot be unique since there is an infinite number of analytic functions which have the same polar singularities. However this ambiguity can be removed if one is concerned with the exact analogues of the perturbative formal sums of one-p.i. ("proper") Feynmann graphs. Then it can be proved that these "physical" one-p.i. n-point functions satisfy a system of non-linear relations similar to those of G.L.Z.[8] linking the complete n-point functions (these relations being always considered here in the formulation given to them by Steinmann[7], which involves generalized retarded functions).

The derivation of this system is given on the basis of asymptotic completeness but it can only be achieved if an additional technical postulate is assumed. This postulate requires that appropriate matrix elements of the spectral measure dE(p) of the translation group in the Hilbert space of the theory should have a certain smoothness property as a function of the four-momentum p.

We must now point out the occurrence of a well-known disease in the construction of the physical one-p.i. n-point functions. It is the possibility of producing new singularities induced by the zeros of the two-point function. By using Symanzik's analysis[3] it is recognized that these singularities can be divided into two classes :

i) a finite number of poles which cross the primitive domain of the n-point functions and whose possible occurrence is connected with the existence of ultraviolet divergences for the propagator.

ii) Singularities lying in the real space inside the continuous part of the spectral region : these are singularities of the C.D.D. type[12].

Whether both types of singularities are spurious or not is not known at present, and we shall not discuss this point here.

In section II we begin by a recall of the axioms of the theory ; in particular the additional technical postulate which we need is described there, under the name of "smooth spectral condition". Section III is devoted to a review of the linear and non-linear properties of the n-point functions, in particular to the completeness relations for generalized retarded distributions [7].

In section IV we extract the one-particle singularities from the n-point functions in one arbitrary channel : the general property of "factorization of residues" is proved and the one-p.i. functions are constructed and shown to satisfy the primitive structure of the n-point functions. In section V, the "smooth spectral condition" is used conjointly with asymptotic completeness to investigate their non-linear structure. Finally, section VI is devoted to the construction of the one-p.i. n-point functions with respect to all channels.

The proof of completeness relations for the one-p.i. functions raises questions of mathematical rigor concerning the restriction of distributions to the mass-shell and the integration of these restrictions over the mass-shell. These questions are ruled out by using the local analytic structure of general n-point functions in the way of [26] ; the desired results are established in Appendix B. Some mathematical facts concerning the local analytic structure of distributions are listed in Appendix A.

II. THE BASIC POSTULATES.

We first recall the postulates of the rigorous L.S.Z. field theory. They are in brief

A. Wightman axioms [10,11].

i) Relativistic quantum mechanics : there exists a Hilbert space of states $\mathcal{H}$ in which acts a unitarity representation $U(\Lambda,a)$ of the Poincaré group.

ii) Spectral assumption : in the spectral decomposition of the translation group $U(1,a) = \int e^{ip.a}\, dE(p)$

the support of the spectral measure $dE(p)$ is the following

$$Sp. = \{0\} \cup H_m^+ \cup \overline{V}_{2m}^+$$

with

$$H_m^+ = \{p \in R^4 : p^o = \omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\}$$

$$\overline{V}_{2m}^+ = \{p \in R^4 : p^o \geq \sqrt{\vec{p}^2 + 4m^2}\}$$

In sections IV and VI, the case of several masses m_ℓ is also considered, namely

$Sp. = \{0\} \cup \left(\bigcup_\mu H^+_{m_\mu}\right) \cup \overline{V}^+_{2m}$, with $m = \inf_\mu \{m_\mu\}$; $\sup_\mu \{m_\mu\} < 2m$.
To this structure of Sp. corresponds the following decomposition of $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}'$$

where $\mathcal{H}_0$ is one-dimensional and generated by a unique vector $|\Omega\rangle$ called the vacuum, $\mathcal{H}_1$ is a (non-degenerate) subspace of one-particle states with mass(es) m_μ (resp. $\{m_\mu\}$) and $\mathcal{H}'$ corresponds to the continuous part $\overline{V}^+_{2m}$ of the spectrum.

iii) Fields : there exists an operator-valued distribution A(x) which satisfies $[A(x),A(y)] = 0$ for $(x-y)^2 < 0$ (locality)

$$U(\Lambda,a)\, A(x)\, U(\Lambda,a)^{-1} = A(\Lambda x + a) \qquad \text{(relativistic invariance)}$$

The vectors $A^n(\varphi)|\Omega\rangle = \left[\int A(x_1)\ldots A(x_n)\ \tilde{\varphi}(x_1,\ldots,x_n)\ dx_1\ldots dx_n\right]|\Omega\rangle$ span a dense subspace D of $\mathcal{H}$, and A(x) is assumed to have non-vanishing matrix elements between $|\Omega\rangle$ and the subspace $\mathcal{H}_1$. More precisely for any test-function f in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ with its support inside a neighbourhood of $H^+_{m_\mu}$ which does not intersect the rest of the spectrum, and with restriction $\hat{f}_\mu$ to $H^+_{m_\mu}$, we write

$$\| A(f)|\Omega\rangle \|^2 = 2\pi Z_\mu \int |\hat{f}_\mu(p)|^2 \frac{d\vec{p}}{2\omega_\mu} \qquad (1)$$

with the wave-function normalization constant $Z_\mu \neq 0$ and $\omega_\mu = \sqrt{\vec{p}^2 + m_\mu^2}$

Under these axioms, the Haag-Ruelle-Hepp asymptotic theory can be performed [6,13,14] and the sets of asymptotic states there constructed span two subspaces $\mathcal{H}_{in}$ and $\mathcal{H}_{out}$ of $\mathcal{H}$. Then the two following postulates are necessary to carry out further steps.

B. Asymptotic completeness : $\mathcal{H}_{in} = \mathcal{H}_{out} = \mathcal{H}$.

C. Existence of sharp retarded operators.

There exists an infinite set of operator-valued retarded distributions $\tilde{R}(x_1 ; x_2,\ldots,x_n)$ which satisfy all the algebraic relations and support properties suggested by the corresponding formal definitions (in terms of products of multiple commutators by step functions). The reader is referred to [7] for the complete list of these properties.

From this postulate it can be shown [7] that all generalized retarded products (g.r.p.) $\tilde{R}_\mathcal{S}(x_1,\ldots,x_n)$ can be defined (here $\mathcal{S}$ is a certain index described in section 3.1). The operators

$$R_{\mathcal{S}}(\varphi) = \int \tilde{R}_{\mathcal{S}}(x_1,\ldots,x_n)\ \tilde{\varphi}(x_1,\ldots,x_n)\ dx_1\ldots dx_n$$

$$= \int R_{\mathcal{S}}(-p_1,\ldots,-p_n)\ \varphi(p_1,\ldots,p_n)\ dp_1\ldots dp_n$$

act on the dense domain D and take their values on D. Moreover they satisfy the relativistic invariance condition

$$\tilde{R}_{\mathcal{S}}(\Lambda x_1 + a,\ldots,\Lambda x_n + a) = \tilde{R}_{\mathcal{S}}(x_1,\ldots,x_n)$$

Postulate C is needed to make simpler the exploitation of the primitive structure although it is irrelevant as far as one is not concerned with slow increase behaviour in the tubes at infinity.

However it is known that the axioms A-C are not sufficient to avoid local pathologies in momentum space. In particular the development of the M.P.S.A. non-linear program seems to necessitate(*) an additional "smoothness postulate" which can be conveniently formulated as follows :

D. Smooth spectral condition.

Let us call π the projection operator on $\mathcal{H}'$. We shall assume the following property of the spectral measure $dE(p)$.

> For any couple of vectors Φ_1, Φ_2 in D, the measure $\langle \Phi_1,\ \pi dE(p)\pi\ \Phi_2 \rangle$ is a Hölder-continuous[25] function of p.

Remark :

It is known[11] that all matrix elements of the form

$$\int \langle \Phi_1,\ \pi dE(\vec{p},\ p_o)\pi\Phi_2 \rangle\ \chi(p_o)\ dp_o \quad \text{with } \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ and } \Phi_j\ (j=1,2) \text{ in D}$$

are C^∞ functions of $\vec{p}$ as a consequence of relativistic invariance. Postulate D is therefore a statement about the behaviour of $\langle \Phi_1,\ \pi dE(p)\ \pi\Phi_2 \rangle$ with respect to the variable p_o (or $p^2 = p_o^2 - \vec{p}^2$) when $\Phi_{1,2}$ belongs to D.

---

* This was recognized and investigated by Martin[15] in the similar context of the mass-shell non-linear program (use of unitarity). In this connection, see also the notion of "permanence of smoothness" introduced by D.N. WILLIAMS[29].

III. PROPERTIES OF THE N-POINT FUNCTIONS.

III.1. Cells and generalized retarded operators.

In the following N will always denote the set $\{1,2,\ldots,n\}$ of indices numbering the different four-vectors $\{k_1, k_2,\ldots, k_n\}$. $\mathcal{P}^*(N)$ will denote the set of proper subsets I of N and $(I, N\setminus I)$ any partition of N. We shall consider the space $\mathbb{C}^{4(n-1)}_{(k)}$ of the n complex four-vectors $\{k_i = p_i + iq_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ linked by the relation $\sum_{i=1}^{n} k_i = 0$. Moreover k_I will always denote $\sum_{i\in I} k_i$.

We consider the space $\mathbb{C}^{n-1}$ of the n scalar variables $\{s_1, s_2,\ldots, s_n\}$ linked to [illegible] by the "transposition" of this space by the family of planes $\{s_I = 0,\ I \in \mathcal{P}^*(N)\}$. The various open convex cones thus obtained [21] are called geometrical cells and denoted $\{\gamma_{\mathcal{S}},\ \mathcal{S} \in S(N)\}$. Here the index $\mathcal{S}$ stands for the set of all proper sets of N with S_I positive in $\gamma_{\mathcal{S}}$. $\mathcal{S}$ is called a cell of N and satisfy compatibility conditions which we shall not recall here [16,17]. Two cells $\mathcal{S}_+$ and $\mathcal{S}_-$ are called adjacent and separated by a partition $(I, N\setminus I)$ if $\gamma_{\mathcal{S}_+}$ and $\gamma_{\mathcal{S}_-}$ have a common (n-2) - dimensional face in the hyperplane $S_I = S_{N\setminus I} = 0$.

With any cell $\mathcal{S}$ it is possible to associate an element $\hat{\mathcal{S}}$ in an abstract graded Lie algebra $\mathcal{D}$, the so-called Steinmann algebra [18-21]. The set of all products of Green's operators generates a certain representation $\mathcal{D}_A$ of this algebra, the generalized retarded products (g.r.p.) $\tilde{R}_{\mathcal{S}}(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ which we assume here to exist in the sense of sharp operators (Postulate C). We denote by $r_{\mathcal{S}}(p)$ the generalized retarded distribution (g.r.d.) which is the Fourier transform of $\langle \Omega, \tilde{R}_{\mathcal{S}}(x)\ \Omega\rangle$.

Moreover in $\mathcal{D}$ we have the Ruelle discontinuity formula [21] :

$$\hat{\mathcal{S}}_+ - \hat{\mathcal{S}}_- = [\hat{\mathcal{S}}_1, \hat{\mathcal{S}}_2] \tag{2a}$$

where $\mathcal{S}_+$ and $\mathcal{S}_-$ are two adjacent cells separated by $(I, N\setminus I)$;

$\mathcal{S}_1 = \{J \in \mathcal{S}_+,\ J \subset I,\ J \neq I\}$ is a cell of I ; $\mathcal{S}_2 = \{J \in \mathcal{S}_+,\ J \subset N\setminus I\}$ a cell of $N\setminus I$. When I(resp. $N\setminus I$) is reduced to one element $\{i\}$, $\hat{\mathcal{S}}_1$(resp. $\hat{\mathcal{S}}_2$) stands for an element $\hat{i}$ of $\mathcal{D}$ whose image in $\mathcal{D}_A$ is the field operator $A(x_i)$. We write in $\mathcal{D}_A$

$$R_{\mathcal{S}_+} - R_{\mathcal{S}_-} = [R_{\mathcal{S}_1}, R_{\mathcal{S}_2}] \tag{2b}$$

III.2. Linear properties.

From the Wightman axioms A the following primitive structure can be proved for the n-point function $H^{(n)}(k)$:

i) analyticity and slow increase near the real inside a domain which is composed of the union of a certain family of tubes $\{\mathcal{T}_{\mathcal{S}},\ \mathcal{S} \in S(N)\}$ in the linear manifold $\{k \in C^{4n} : \sum_{i\in N} k_i = 0\}$ with appropriate complex neighbourhoods of real regions which connect the various tubes together. Here $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ is defined by :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \{k \in C^{4(n-1)} : \mathrm{Im}\, k_I \in V^+,\ \forall\ I \in \mathcal{S}\}$$

and the real boundary value of $H^{(n)}$ inside $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$

$$H^{(n)}_{\mathcal{S}}(p) = \lim_{\substack{q\to 0 \\ p+iq\in\mathcal{T}_{\mathcal{S}}}} H^{(n)}(p+iq)$$

coincides with the g.r.d. $r_{\mathcal{S}}(p)$ up to an overall δ factor :

$$r_{\mathcal{S}}(p) = H^{(n)}_{\mathcal{S}}(p)\ \delta\left(\sum_{i\in N} p_i\right)$$

ii) Steinmann relations hold between the various boundary values $\{H^{(n)}_{\mathcal{S}}(p),\ \mathcal{S} \in S(N)\}$

iii) Coincidence of two adjacent boundary values $H^{(n)}_{\mathcal{S}_+^{\pm}}(p)$ and $H^{(n)}_{\mathcal{S}_-}(p)$ separated by a partition $(I, N\backslash I)$ on a real region $\mathcal{R}_I$ thus defined :

$$\mathcal{R}_I = \{p \in R^{4(n-1)} : p_I^2 \neq m_\mu^2,\ p_I^2 < 4m^2\}$$

These two properties are consequences of relation (2b). We note that in view of iii) the support of the distribution $[H^{(n)}_{\mathcal{S}_+} - H^{(n)}_{\mathcal{S}_-}](p)$ is the union of the two following disconnected sets

$$\sum_I^{\pm} = \{p \in R^{4(n-1)} : p_I \in \left(\cup_\mu H^+_{m_\mu}\right) \cup \bar{V}^{\pm}_{2m}$$

where $H^+_{m_\mu} = -H^-_{m_\mu}$ and $\bar{V}^+_{2m} = -\bar{V}^-_{2m}$ have been defined in section II. Taking into account (2a) we then choose to write

$$H^{(n)}_{\mathcal{S}_+} - H^{(n)}_{\mathcal{S}_-} = \Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)} - \Delta_{\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1} H^{(n)} \qquad (2c)$$

where $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)}$ (resp. $\Delta_{\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1} H^{(n)}$) is defined as the value of $[H^{(n)}_{\mathcal{S}_+} - H^{(n)}_{\mathcal{S}_-}]$ on

$\sum_I^+$ (resp. $\sum_I^-$) and zero outside.

$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)}$ is called an absorptive part of $H^{(n)}$. This absorptive part is one of the boundary values of a function $\Delta^I H^{(n)}$ which is the common analytic continuation inside the manifold $q_I = q_{N\setminus I} = 0$ of all the discontinuities $[H^{(n)}_{\mathcal{S}_+} - H^{(n)}_{\mathcal{S}_-}](k)$, with the couple $(\mathcal{S}_+, \mathcal{S}_-)$ separated by the partition $(I, N\setminus I)$. Actually $\Delta^I H^{(n)}$ is analytic* inside the union of all the "flat" tubes $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} = \{k \in C^{4(n-1)} : q_I = q_{N\setminus I} = 0 \; ; \; \forall J \in \mathcal{S}_{1,2}, \; q_J \in V^+\}$ with appropriate real regions connecting these flat tubes together. Its real boundary value taken in $\sum_I^+$ from the tube $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}$ is $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)}$. The absorptive parts $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)}$ and the discontinuity $\Delta^I H^{(n)}$ in a given channel $(I, N\setminus I)$ will play a basic role further in the formulation of the non-linear properties of the n-point function.

Finally, following[1], we call general n-point function any function F enjoying properties i) to iii) stated above but having no longer any physical connection with products of n fields. We write $F_{\mathcal{S}}$ for its real boundary value inside the tube $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, $\Delta^I F$ for its discontinuity on the manifold $q_I = q_{N\setminus I} = 0$ and similarly $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} F$ for its absorptive parts with support in $\sum_I^+$.

III.3 Non-linear properties of the n-point functions.

We shall now write the "completeness relations" which link together the various n-point generalized retarded distribution (g.r.d), and are consequences of the postulate of asymptotic completeness. Obtained through an extensive use of reduction formulae, they are the field theoretic off-shell extrapolations of the unitarity relations first derived by Glaser, Lehmann and Zimmermann[8], they have been presented in a completely rigorous and general version by Steinmann[7]. However, for a reason which will appear in the following lines, we shall not fully adopt Steinmann's point of view. For the sake of simplicity, we shall only consider the case of a single discrete mass m in the spectrum.

We shall recall the following algebraic notion :

Proposition 1[16]

Let $\mathcal{S}$ be a cell of N and K be a non-empty finite set of integers, with $K \cap N = \emptyset$. We define

$$K \uparrow \mathcal{S} = \{J \subset K \cup N \; ; \; \emptyset \neq J \subset K \text{ or } J \cap N \in \mathcal{S}\}.$$

---

* more precisely, $\Delta^I H^{(n)}$ is a distribution in p_I which depends analytically on the $4(n-2)$ remaining independent four-vectors k_j.

Then $K \uparrow \mathcal{S}$ is a cell of $N \cup K$.
Similarly, the following set $K \downarrow \mathcal{S}$ is a cell of $N \cup K$:

$$K \downarrow \mathcal{S} = \{J \subset N \cup K : N \subset J \neq N \cup K \text{ or } J \cap N \subset \mathcal{S}\}$$

Then with any n-point g.r.p. $R_{\mathcal{S}}(p'_1,\ldots, p'_n)$, we can associate, for all values of $k = |K|$, two (n+k) - point g.r.p'.s, which we denote $R_{K\uparrow\mathcal{S}}(p_1,\ldots,p_k ; p'_1,\ldots,p'_n)$ and $R_{K\downarrow\mathcal{S}}(p_1,\ldots,p_k ; p'_1,\ldots,p'_n)$. We similarly define the corresponding general retarded distributions (g.r.d.) $r_{K\uparrow\mathcal{S}}$ and $r_{K\downarrow\mathcal{S}}$. Note that if N reduces to a single element, then $R_{K\uparrow\mathcal{S}}$(resp. $R_{K\downarrow\mathcal{S}}$) is an ordinary retarded (resp advanced) (k+1)- point operator.

Now some care is needed for giving the correct definition of the mass-shell restrictions $\hat{r}_{K\updownarrow\mathcal{S}}$ of the amputated g.r.d. $r_{K\updownarrow\mathcal{S}}$, since the existence of these restrictions as distributions on the mass-shell was the key-point in the rigorous proof of reduction formulae (see K. Hepp [6] , O. Steinmann [7] , and also in this connection J. Bros, H. Epstein, V. Glaser [26]).

On the mass-shell manifold $\mathcal{M}_K^+ = (H_m^+)^k$, let us define the subset Ω of all configurations $\{p_j \in H_m^+ , j = 1, 2,\ldots, k\}$ such that at least two vectors p_i, p_j coincide. Ω is a closed set of measure zero, and we denote by Ω' its complement in $\mathcal{M}_K^+$. Conventionally, every wave-packet $\prod_{j=1}^{k} \hat{f}_j(\vec{p}_j)$ with support in $\Omega'$is called "non-overlapping" ; we shall thus call Ω the "overlap set".

Then we have the following :

lemma 1 :

i) It is meaningful to define the following distribution in the open set $\Omega' \times R^{4n}_{(p')}$:

$$\hat{r}_{K\downarrow\mathcal{S}}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k ; p') = \Big[\prod_{j=1}^{k} (p_j^2 - m^2)\; r_{K\downarrow\mathcal{S}}(p_1,\ldots,p_k ; p')\Big]_{\left| \begin{array}{l} p_j^\circ = \omega_j \\ 1 \leqslant j \leqslant k \end{array} \right.} \qquad (3)$$

with $\omega_j = \sqrt{p_j^2 + m^2}$

ii) for every $\varphi \in \mathcal{S}(R^{4n}_{(p')})$, the distribution

$$\hat{r}_{K\downarrow\mathcal{S}}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k\ ;\ \varphi) = \int \hat{r}_{K\downarrow\mathcal{S}}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k\ ;\ p')\ \varphi(-p')\ dp' \qquad (4)$$

defined in Ω', can be identified with a square-integrable function on the whole manifold $\mathcal{M}_K^+$, and the following reduction formulae hold :

$$\langle \Phi^{out}_{\hat{f}_1\ldots\hat{f}_k},\ R_{\mathcal{S}}(\varphi)\ \Omega\rangle = \int \hat{r}_{K\downarrow\mathcal{S}}(\vec{p}_1\ldots\vec{p}_k\ ;\ \varphi).\prod_{j=1}^{k} \hat{f}_j^{*}(\vec{p}_j)\ \frac{d\vec{p}_j}{2\omega_j} \qquad (5)$$

for arbitrary wave packets $\prod_{j=1}^{k} \hat{f}_j(\vec{p}_j)$ in $L^2(\mathcal{M}_K^+)$. (The meaning of * being "complex conjugation").

The following similar relations hold :

$$\text{in } \Omega' \times R^{4n}_{(p')} : \hat{r}_{K\uparrow\mathcal{S}}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k\ ;\ p') = \prod_{j=1}^{k} (p_j^2 - m^2)\ r_{K\uparrow\mathcal{S}}(p_1,\ldots,p_k\ ;\ p') \quad \Big| \quad p_j^o = \omega_j \qquad (6)$$

$$\text{in } \mathcal{M}_K^+ : \langle \Phi^{in}_{\hat{f}_1\ldots\hat{f}_k},\ R_{\mathcal{S}}(\varphi)\Omega\rangle = \int \hat{r}_{K\uparrow\mathcal{S}}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k\ ;\varphi) \prod_{j=1}^{k} \hat{f}_j^{*}(p_j)\ \frac{d\vec{p}_j}{2\omega_j} \qquad (7)$$

Proof and comments :

The first part of the lemma results from Hepp's analysis [6], which can be carried through for the g.r.p.'s [7] as well as for the chronological products ; this property can also be obtained in the local analytic structure approach, which we shall recall below and in Appendices A and B.

The second part is based on the following argument : from Haag-Ruelle asymptotic theory, $\langle (\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k)^{out}, R_{\mathcal{S}}(\varphi)\Omega\rangle$ is defined as a square-integrable function on $\mathcal{M}_K^+$ (L^2 with respect to the measure $\prod_{j=1}^{k} \frac{d\vec{p}_j}{2\omega_j}$) ; moreover it is proved in the rigorous theory of reduction formulae [6, 7, 22], that this L^2 function must coincide in the sense of distributions in Ω', with $\hat{r}_{K\downarrow\mathcal{S}}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k\ ;\varphi)$, the latter being defined in Ω' in view of the first part. Now since Ω is a set of measure zero, it is legitimate to say that $\hat{r}_{K\downarrow\mathcal{S}}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k\ ;\varphi)$ represents a

unique square-integrable function on the whole set $\mathcal{M}_K^+$ (this defines a "canonical extension" of $\hat{r}_{K\downarrow\mathcal{S}}$ as a distribution on $\mathcal{M}_K^+ \times R^{4n}_{(p')}$ since any other extension would contain polynomials of δ-functions with support in Ω). With this extended definition of $\hat{r}_{K\downarrow\mathcal{S}}$ reduction formula (4) holds for arbitrary L^2-wave packet in $\mathcal{M}_K^+$. Therefore, the latter definition is also suitable for the rigorous derivation of completeness equations of the G.L.Z. type for the g.r.d.'s[7] ; in doing so, we avoid using the definition of $r_{K\updownarrow\mathcal{S}}$ as a "refined average" in the neighbourhood of Ω, introduced in [7] ; such a refinement would be difficult to reproduce in the further case of one-p.i. functions.

Now, in view of later use, it is important to give an interpretation of $\hat{r}_{K\updownarrow\mathcal{S}}$ in Ω' from the point of view of the local analytic structure of $H^{(n+k)}$ [26]. A rather general way of studying the existence of the restriction of a distribution to a submanifold is based on the following fact (see [26], theorem 2 and [28]) : assume that a distribution T can be expressed on a certain open set U of $\mathbb{R}^n$ as a finite sum of boundary values T_β of analytic functions F_β, respectively defined in local tubes $U + i\mathscr{C}_\beta$ (in $\mathbb{C}^n$), each $\mathscr{C}_\beta$ being an open convex cone ; then T admits a restriction to every submanifold $\mathcal{M}$ of U, which is "transverse" to all cones $\mathscr{C}_\beta$ (i.e. such that the tangent hyperplane to $\mathcal{M}$ at every point $p \in \mathcal{M}$ has non-empty intersections with all cones $\mathscr{C}_\beta$) : in fact, it is then possible to restrict each F_β to the complexified manifold $\mathcal{M}^c$ of $\mathcal{M}$, and then take the real boundary value of this restriction $\hat{F}_\beta$ which is a distribution in $\mathcal{M}$. In [26], such an analysis was made for the fully amputated chronological products , and the restriction of the latter to the mass-shell $\mathcal{M}_n$ could be defined in this way in the complement of the overlap set of $\mathcal{M}_n$. A similar analysis is done here in Appendix B for the $H_{K\updownarrow\mathcal{S}}$'s, and yields :

lemma 2 : Let $\mathcal{M}' = \{(p,p') \; ; \; p \in \Omega' \; ; \; \sum_{j\in K} p_j + \sum_{i\in N} p'_i = 0 \}$.

For every point (p, p') in the manifold $\mathcal{M}'$, there exists a neighbourhood U of (p, p') in $R^{4(n+k-1)}$ in which any distribution $\hat{H}_{K\updownarrow\mathcal{S}}$ can be expressed as a finite sum of boundary values of analytic functions h_β, each h_β being analytic in a local tube which is transverse to the complex mass-shell manifold $\mathcal{M}'_c$ (i.e. $\mathcal{M}'$ complexified).

According to the above comments, this gives an alternative proof of the first part of lemma 1 (since $\hat{r}_{K\updownarrow\mathcal{S}} = \delta(\sum_{j\in K} p_j + \sum_{i\in \bar{K}} p_i').\ \hat{H}^{(n+k)}_{K\updownarrow\mathcal{S}}$).

The advantage of this procedure is to belong to the linear program (use of causality and spectrum) and therefore to also apply to general n-point functions, such as the one-p.i. functions (see Appendix B, and section V). We now turn to the algebraic description of the completeness relations which link the various g.r.d.'s[7].

Being given a channel $(I,N\setminus I)$ let us introduce the following family of sets $\{\sum^{\ell}_{I,N\setminus I},\ \ell > 1\}$ in $R^{4(n-1)}$.

$$\sum^{1}_{I,N\setminus I} = \{p \in R^{4(n-1)} : p_I^2 = m^2\} \tag{8}$$

$$\sum^{\ell}_{I,N\setminus I} = \{p \in R^{4(n-1)} : \ell^2 m^2 \leqslant p_I^2 < (\ell+1)^2 m^2\} \qquad \ell \geqslant 2 \tag{9}$$

with p_I^2 the squared total energy in the considered channel.

Being given an absorptive part $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)}$ of the n-point function $H^{(n)}$ in the channel $(I,N\setminus I)$, the completeness of one-particle states yields on $\sum^{1}_{I,N\setminus I}$:

$$\delta\Big(\sum_{i\in N} p_i\Big)\ \Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)} = \frac{2i\pi}{Z}\int dp_\lambda\ \delta^-_\lambda\ \hat{r}_{\lambda\uparrow\mathcal{S}_1}\ \hat{r}_{\underline{\lambda}\uparrow\mathcal{S}_2} = \frac{2i\pi}{Z}\int dp_\lambda\ \delta^-_\lambda\ \hat{r}_{\lambda\downarrow\mathcal{S}_1}\ \hat{r}_{\underline{\lambda}\downarrow\mathcal{S}_2} \tag{10a}$$

where the notation $\underline{\lambda}$ means that $p_{\underline{\lambda}} = -p_\lambda$, $\delta^-_\lambda = \theta(-p^o_\lambda)\,\delta(p^2_\lambda - m^2)$ with $\theta(t) = \frac{1}{2}(t+|t|)$; Z is the normalization constant defined in (1) and the various $\hat{r}_{\lambda\updownarrow\mathcal{S}}$ are defined as in (3). This can be rewritten :

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)} = \frac{2i\pi}{Z}\ \delta^-_\lambda\ \hat{H}^{(n_1+1)}_{\lambda\uparrow\mathcal{S}_1}\ H^{(n_2+1)}_{\underline{\lambda}\uparrow\mathcal{S}_2} = \frac{2i\pi}{Z}\ \delta^-_\lambda\ \hat{H}^{(n_1+1)}_{\lambda\downarrow\mathcal{S}_1}\ \hat{H}^{(n_2+1)}_{\underline{\lambda}\downarrow\mathcal{S}_2} \tag{10b}$$

with $n_1 = |I|$ and $n_2 = |N\ I|$. Here $-p_\lambda = p_{\underline{\lambda}} = p_I$ and the various $\hat{H}^{(n_j+1)}_{\lambda\updownarrow\mathcal{S}_j}$ are defined as in (3) by :

$$\hat{H}^{(n_j+1)}_{\lambda\updownarrow\mathcal{S}_j} = (p_I^2 - m^2)\ H^{(n_j+1)}_{\lambda\updownarrow\mathcal{S}_j}$$

Similarly on any $\sum_{I,N\setminus I}^{\ell}$ with $\ell \geq 2$, the completeness of incoming (resp. outgoing) states with $(2,3,\ldots,\ell)$ particles yields

$$\delta\Big(\sum_{i\in N} p_i\Big)\, \Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}\, H^{(n)} = \sum_{k=2}^{\ell} \Big(\frac{2i\pi}{Z}\Big)^k \frac{1}{k!}\, \hat{r}_{K\uparrow\mathcal{S}_1} * \hat{r}_{\underline{K}\uparrow\mathcal{S}_2} = \sum_{k=2}^{\ell} \Big(\frac{2i\pi}{Z}\Big)^k \frac{1}{k!}\, \hat{r}_{K\downarrow\mathcal{S}_1} * \hat{r}_{\underline{K}\downarrow\mathcal{S}_2} \tag{11a}$$

Here some explanation of the notation is needed : with any value of $k \geq 2$ we associate a set of k indices $K = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$ and two g.r.d.'s $\hat{r}_{K\uparrow\mathcal{S}_j}$ and $\hat{r}_{\underline{K}\uparrow\mathcal{S}_j}$ (resp. $\hat{r}_{K\downarrow\mathcal{S}_j}$ and $\hat{r}_{\underline{K}\downarrow\mathcal{S}_j}$) defined as in lemma 1. The notation $\underline{K} = \{\underline{\lambda}_1,\ldots,\underline{\lambda}_k\}$ means that $p_{\underline{\lambda}_j} = \pm p_{\lambda_j}$ and the notation $*$ is defined as follows

$$\hat{r}_{K\uparrow\mathcal{S}_1} * \hat{r}_{\underline{K}\uparrow\mathcal{S}_2} = \int_{\mathbb{R}^{4k}} \prod_{j=1}^{k} \Big[\, \delta^{-}_{\lambda_j}\, dp_{\lambda_j}\Big]\, \hat{r}_{K\uparrow\mathcal{S}_1}\, \hat{r}_{\underline{K}\uparrow\mathcal{S}_2} \tag{12}$$

In view of lemma 2, the product of the distributions $\hat{r}_{K\uparrow\mathcal{S}_1}$ and $\hat{r}_{\underline{K}\uparrow\mathcal{S}_2}$ which occurs in (10a) and (12) is well defined (after testing in the external variables) in the sense of functions square-integrable with respect to the measure $\prod_{j=1}^{k} \frac{d\vec{p}_{\lambda_j}}{2\omega_j}$: their product is integrable and (12) is meaningful.

Finally we can rewrite (11a) under the form :

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}\, H^{(n)} = \sum_{k=2}^{\ell} \Big(\frac{2i\pi}{Z}\Big)^k \frac{1}{k!}\, \hat{H}^{(n_1+k)}_{K\uparrow\mathcal{S}_1} * \hat{H}^{(n_2+k)}_{\underline{K}\uparrow\mathcal{S}_2} = \sum_{k=2}^{\ell} \Big(\frac{2i\pi}{Z}\Big)^k \frac{1}{k!}\, \hat{H}^{(n_1+k)}_{K\downarrow\mathcal{S}_1} * \hat{H}^{(n_2+k)}_{\underline{K}\downarrow\mathcal{S}_2} \tag{11b}$$

Here the various $\hat{H}^{(n_j+k)}_{K\updownarrow\mathcal{S}_j}$ are defined as in (3) and the notation $*$ is defined by

$$\hat{H}^{(n_1+k)}_{K\uparrow\mathcal{S}_1} * \hat{H}^{(n_2+k)}_{\underline{K}\uparrow\mathcal{S}_2} = \int_{R^{4k}} \prod_{j=1}^{k} \Big[\, \delta^{-}_{\lambda_j}\, dp_{\lambda_j}\Big]\, \delta(p_{I\cup K})\, \hat{H}^{(n_1+k)}_{K\uparrow\mathcal{S}_1}\, \hat{H}^{(n_2+k)}_{\underline{K}\uparrow\mathcal{S}_2}$$

Relations (10) and (11) are the asymptotic completeness relations : written for any absorptive part $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}\, H^{(n)}$ in any channel $(I,N\setminus I)$ they express the whole non-linear information of general quantum field theory.

III.4 Consequences of the smooth spectral condition.

In this section we shall now be concerned with the smoothness properties which can be deduced from Postulate D for the absorptive parts and the boundary values of the n-point function.

Consider the set $\mathcal{S}_n(\overline{V}^+_{2m})$ of all test-functions $\varphi(p_1,\ldots,p_n)$ in $\mathcal{S}(R_p^{4n})$ such that the projection of the support of φ into the space R_p^4 of the total four momentum $P = \sum_{i=1}^{n} p_i$ only intersects the continuous part $\overline{V}^+_{2m}$ of the spectrum. We also introduce the space $R^{4(n-1)}_{\underline{p}}$ of "barycentric variables" $\underline{p} = \{\underline{p}_i = p_i - \frac{p}{n}\,;\ \sum_{i=1}^{n} \underline{p}_i = 0\}$.

Proposition 2 :

Let $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$) be some cell of I (resp. N\I) and $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)}$ the corresponding absorptive part. The distribution

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)}(p_I;\underline{\varphi}_1,\underline{\varphi}_2) = \int \Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)}\left(p_I,\underline{p}^{(n_1)},\underline{p}^{(n_2)}\right)\underline{\varphi}_1\left(\underline{p}^{(n_1)}\right)\underline{\varphi}_2\left(\underline{p}^{(n_2)}\right)d\underline{p}^{(n_1)}\,d\underline{p}^{(n_2)} \tag{13}$$

with $\underline{\varphi}_j \in \mathcal{S}(R^{4(n_j-1)}_{\underline{p}^{(n_j)}})$ and $\underline{p}^{(n_1)}$ (resp. $\underline{p}^{(n_2)}$) the barycentric variables of the set $\{p_i,\ i \in I\}$ (resp. $\{p_j,\ j \in N\backslash I\}$), can be identified with a Hölder-continuous function of the variable p_I.

Proof :

Let $\psi_j (j = 1,2)$ be the following vector in D :

$$\psi_j = R_{\mathcal{S}_j}(\varphi_j)|\Omega\rangle = \int R_{\mathcal{S}_j}(-p_1,\ldots,-p_{n_j})\ \varphi_j(p_1,\ldots,p_{n_j})\ dp_1\ldots dp_{n_j}|\Omega\rangle$$

Using a classical argument ([11] p. 70) based on the translation invariance of the operator $R_{\mathcal{S}_j}$, one easily shows that if $\varphi_j \in \mathcal{S}_{n_j}(\overline{V}^+_{2m})$, then :

$$\Pi R_{\mathcal{S}_j}(\varphi_j)|\Omega\rangle = R_{\mathcal{S}_j}(\varphi_j)|\Omega\rangle,$$

so that :

$$\langle\psi_1,\ \Pi dE(p)\Pi\psi_2\rangle = \langle\psi_1,\ dE(p)\ \psi_2\rangle$$

But using again translation invariance, we have :

$$\langle \psi_1,\ dE(p)\psi_2\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ipa}\ .\langle \psi_1, U(1,a)\psi_2\rangle\ da =$$

$$= \int \varphi_1^{*}(p_1,\ldots,p_{n_1})\varphi_2(-p'_1\ldots.-p'_{n_2})\ \langle \Omega, R_{\mathcal{S}_1}(p_1,\ldots,p_{n_1}).R_{\mathcal{S}_2}(p'_1,\ldots,p'_{n_2})\Omega\rangle.$$

$$.\delta_4(p - p_I)\ dp_1 \ldots dp_{n_1}\ dp'_1 \ldots dp'_{n_2}\ . \qquad (14)$$

Now putting $p_i = \frac{p_I}{n_1} + \underline{p}_i\ ,\quad i \in I\ ;\ p'_j = \frac{p_{N\setminus I}}{n_2} + \underline{p}'_j\ ,\quad j \in N\setminus I$

and $\underline{p}^{(n_1)} = \{\underline{p}_i\ ,\ i \in I\ ;\ \sum_{i\in I}\underline{p}_i = 0\}\ ;\ \underline{p}^{(n_2)} = \{\underline{p}'_j\ ,\ j \in N\setminus I\ ;\ \sum_{j\in N\setminus I}\underline{p}'_j = 0\}\ ,$

We can integrate over p_I, $p_{N\setminus I}$; taking into account that $\langle R_{\mathcal{S}_1}.R_{\mathcal{S}_2}\rangle = \delta(p_I + p_{N\setminus I})\ \Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}H^{(n)}\left(p_I\ ;\ \underline{p}^{(n_1)}, \underline{p}^{(n_2)}\right)$, relation (14) yields

$\langle \psi_1, dE(p)\psi_2\rangle = \Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}H^{(n)}(p_I=p;\varphi_1,\varphi_2)$ (i.e. (13)) provided that one chooses :

$\varphi_j = \underline{\varphi}_j\left(\underline{p}^{(n_j)}\right).\chi(p_I)$; $j = 1,2$ with $\chi(p_I)$ locally equal to 1 at $p_I = p$.

Then postulate D immediately gives the announced result.

Proposition 3 :

Let $\mathcal{S}_+$ and $\mathcal{S}_-$ be two adjacent cells separated by the partition $(I, N\setminus I)$. Then for every $\underline{\varphi}_1$, $\underline{\varphi}_2$ as in proposition 2, the expression

$$H^{(n)}_{\mathcal{S}_\pm}(p_I\ ;\ \underline{\varphi}_1,\underline{\varphi}_2) = \int H^{(n)}_{\mathcal{S}_\pm}\left(p_I, \underline{p}^{(n_1)}, \underline{p}^{(n_2)}\right)\underline{\varphi}_1\left(\underline{p}^{(n_1)}\right)\underline{\varphi}_2\left(\underline{p}^{(n_2)}\right)d\underline{p}^{(n_1)}\ d\underline{p}^{(n_2)} \qquad (15)$$

is a Hölder-continuous function of p_I .

Proof : by taking a sufficiently large integer N , we can introduce the auxiliary functions :

$$I^{\pm}(\vec{p}_I, k^o_I; \underline{k}) = (k^o_I)^N \int \frac{\left(\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}H^{(n)} - \Delta_{\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1}H^{(n)}\right)(\vec{p}_I, u; \underline{k})}{u^N(u - k^o_I)}\ du \qquad (16)$$

which are respectively analytic in the tubes

$$\left\{k\ ;\ \mathrm{Im}\ k^o_i \gtrless 0\ ;\ \mathrm{Im}\ \vec{k}_I = 0\ ;\ \underline{k} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}\right\}\ ,$$

and such that (in the sense of distributions on their common face $\{k\ ;\ \mathrm{Im}\ k_I = 0\}$) :

$$I^+ - I^- = H^{(n)}_{\mathcal{O}^+} - H^{(n)}_{\mathcal{O}^-} \quad .$$

As a result of the edge of the wedge theorem, there exists an analytic function $G(p_I, k_I^o ; \underline{k})$ in the convex envelope $\mathcal{T}_c$ of $\mathcal{T}_{\mathcal{O}^+} \cup \mathcal{T}_{\mathcal{O}^-} \Big|_{\mathrm{Im}\ \vec{k}_I = 0}$ such that in $\mathcal{T}_{\mathcal{O}^\pm}$:

$$H^{(n)}_{\mathcal{O}^\pm} = G + I^{\pm} \quad .$$

After testing both sides of this relation (on the real) with $\underline{\varphi}_1$, $\underline{\varphi}_2$, we get :

$$H^{(n)}_{\mathcal{O}^\pm}(p_I ; \underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2) = G(p_I ; \underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2) + I^{\pm}(p_I ; \underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2) \quad .$$

The Hölder continuity of $H^{(n)}_{\mathcal{O}^\pm}(p_I ; \underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2)$ is then entailed by the two following facts :

i) Hölder-continuity of $I^{\pm}(p_I ; \underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2)$: it is a consequence of proposition 2, since Hölder-continuity is preserved by convolution with the Cauchy kernel (i.e. by Hilbert transform ; see [24]) ; formula (16) therefore yields the desired result, after testing with $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2$.

ii) $G(p_I ; \underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2)$ is a C^∞ function of p_I , since it is obtained by testing the boundary value of G on a submanifold which is transverse to the tube $\mathcal{T}_c$ in which G is analytic (see proposition A-3).

IV. CONSTRUCTION OF ONE-p.i. N-POINT FUNCTIONS.

IV. Poles and residues of the n-point functions.

Let $\hat{H}^{(n)}$ denote the "fully-amputated" n-point function, namely

$$\hat{H}^{(n)}(k_1,..,k_n)=\prod_{\mu}\prod_{(I,N\setminus I)}(k_I^2 - m_\mu^2)\ H^{(n)}(k_1,\ldots,k_n) \qquad (17)$$

where the product extends to all partitions of N into two subsets $(I,N\setminus I)$.

$\hat{H}^{(n)}$ is a general n-point function whose boundary values $\{\hat{H}^{(n)}_{\mathcal{S}},\ \mathcal{S}\in S(N)\}$ satisfy the following coincidence relations. For any couple $(\mathcal{S}_+,\mathcal{S}_-)$ of adjacent cells separated by a partition $(I,N\setminus I)$,

$$\hat{H}^{(n)}_{\mathcal{S}_+}(p) = \hat{H}^{(n)}_{\mathcal{S}_-}(p) \quad \text{in } \hat{\mathcal{R}}_I = \{p\in R^{4(n-1)} : p_I^2 < 4m^2\}$$

To show this it is enough to concentrate on a fixed partition $(I,N\setminus I)$ and to prove that

$$\int \Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}\Big[\prod_{\mu}(p_I^2 - m_\mu^2)\ H^{(n)}\Big]\Big(p_I,\underline{p}^{(n_1)},\underline{p}^{(n_2)}\Big)\varphi_1^*\Big(\underline{p}^{(n_1)}\Big)\varphi_2\Big(\underline{p}^{(n_2)}\Big)\ d\underline{p}^{(n_1)}\ d\underline{p}^{(n_2)}\ dp_I = 0$$

for all test-functions φ_j $(j=1,2)$ whose support does not intersect the region $\{p_I\in \bar{V}^+_{2m}\}$. Here $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$) is a cell of I (resp. $N\setminus I$) with $\hat{\mathcal{S}}_+ - \hat{\mathcal{S}}_- = \big[\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\mathcal{S}}_2\big]$. Applying the argument of subsection III.4 (using the translational invariance of the operators $R_{\mathcal{S}_j}$), the left-hand side can be rewritten :

$$\int \prod_{\mu}(p^2 - m_\mu^2)\ \langle\ \psi_1,\ dE(p)\ \psi_2\ \rangle$$

with $\psi_j = R_{\mathcal{S}_j}(\varphi_j)\,|\,\Omega\rangle\ (j=1,2)$. This matrix element of $dE(p)$ is a measure with support $\{p\in \bigcup_{\mu}\bar{H}^+_{m\mu}\}$; it therefore factorizes $\sum_{\mu} c_\mu\,\delta^+_\mu(p)$ (*) and yields zero for the integral. q.e.d.

Let us now denote $\hat{\mathcal{D}}^{(n)}$ the primitive domain of $\hat{H}^{(n)}$ associated with this set of coincidence relations and let $\mathcal{E}(\hat{\mathcal{D}}^{(n)})$ be the holomorphy envelope of $\hat{\mathcal{D}}^{(n)}$ in $\mathbb{C}^{4(n-1)}$: it is crossed by $\mathcal{M}_{I,\mu}=\{k\in\mathbb{C}^{4(n-1)} : k_I^2 = m_\mu^2\}$; thus taking (17) into account, we have

---

(*) where $\delta^+_\mu(p) = \theta(p^o)\ \delta(p^2-m_\mu^2)$.

Proposition 4.

The n-point function $H^{(n)}$ is meromorphic in the holomorphy envelope $\mathcal{E}(\hat{\mathcal{D}}^{(n)})$ and it is given there by

$$H^{(n)}(k) = \frac{\hat{H}^{(n)}(k)}{\prod_{\mu} \prod_{(I,N\setminus I)} (k_I^2 - m_\mu^2)}$$

with $\hat{H}^{(n)}$ holomorphic in $\mathcal{E}(\hat{\mathcal{D}}^{(n)})$.

Remark :

This result contains as a special case the treatment of poles in the s-plane dispersion relations[4], since all processes of analytic continuation for $\hat{H}^{(n)}$ yield corresponding meromorphic continuation for $H^{(n)}$.

We shall now compute the residues of all the functions $H^{(n)}$ on their various polar manifolds $\mathcal{M}_{I,\mu}$. We define

$$G_\mu^{I,N\setminus I}(k_I;k') = (k_I^2 - m_\mu^2)\, H^{(n)}(k_I;k') \Big|_{\mathcal{M}_{I,\mu}} \tag{18}$$

where k' denotes a set of (n-2) independent four-vectors. $G_\mu^{I,N\setminus I}$ is the residue function of $H^{(n)}$ on $\mathcal{M}_{I,\mu}$. In view of proposition 4, it is meromorphic in $\mathcal{E}\left(\hat{\mathcal{D}}^{(n)}\right) \cap \mathcal{M}_{I,\mu}$.

Now the restriction of $G_\mu^{I,N\setminus I}$ to the "real" submanifold

$$\mathcal{M}_{I,\mu}^{+} = \{k \in C^{4(n-1)} : q_I = 0,\ p_I \in H_{m_\mu}^{+}\}$$

satisfies the following relation, which is valid for p_I in a neighbourhood of $H_{m_\mu}^{+}$:

$$G_\mu^{I,N\setminus I}(p_I;k')\ \delta_\mu^{+}(p_I) = -\frac{1}{2i\pi}\,\Delta^I H^{(n)}(p_I;k') \tag{19}$$

Here $\delta_\mu^{+}(p) = \theta(p^o)\ \delta(p^2 - m_\mu^2)$

and $$\Delta^I H^{(n)}(p;k') = \lim_{\substack{\varepsilon \in V^{+} \\ \varepsilon \to 0}} \left[H^{(n)}(p + i\varepsilon;k') - H^{(n)}(p - i\varepsilon;k') \right]$$

is the analytic absorptive part (with various boundary values $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)}$) introduced in section III.2.

The above relation (19) is the exact analogue in several variables of the formula

$$\text{Res.}f\Big|_{z=0} \cdot \delta(x) = \frac{1}{2i\pi}\left[f(x - i\varepsilon) - f(x + i\varepsilon)\right]$$

for functions having a simple pole at the origin ; it holds as an identity between distributions in the real variable p_I, analytically valued in the variables k'.

Let Z_μ be the "wave-function renormalization constants" of the field defined in (1) by :

$$||A(f) \mid \Omega\rangle||^2 = 2\pi\, Z_\mu \int |\hat{f}_\mu(\vec{p})|^2 \frac{d\vec{p}}{2\omega_\mu} \quad .$$

Then for n = 2, relation (19) yields (in a neighbourhood of $H^+_{m_\mu}$) :

$$G_\mu^{\{1\},\{2\}}\ \delta^+_\mu(p_1)\ \delta(p_1 + p_2) = -\frac{1}{2\pi}\langle\Omega,\ A(p_1)\ A(p_2)\Omega\rangle = -\ Z_\mu \delta^+_\mu(p_1)\ \delta(p_1 + p_2)$$

$$G_\mu^{\{1\},\{2\}} = -\ Z_\mu \tag{20}$$

For a general value of n, it follows from the completeness relation (11b) that

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}\ H^{(n)}(p_I;p') = \frac{2i\pi}{Z_\mu}\ \delta^+_\mu(p_I)\left[(p_I^2 - m_\mu^2)\ H^{(n_1+1)}_{\lambda\uparrow\mathcal{S}_1}\right]\cdot\left[(p^2_{N\setminus I} - m_\mu^2)\ H^{(n_2+1)}_{\underline{\lambda}\uparrow\mathcal{S}_2}\right] \tag{21}$$

which is valid for p_I in a neighbourhood of $H^+_{m_\mu}$.

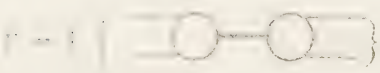
Here $n_1 = |I|$, $n_2 = |N\setminus I|$ and λ(resp $\underline{\lambda}$) stands for the internal four-vector in the argument of $H^{(n_1+1)}$ (resp. $H^{(n_2+1)}$) that is $p_\lambda = -p_{\underline{\lambda}} = p_{N\setminus I}$.

Let us now consider the analytic function

$$H^\Gamma_\mu(k_1,\ldots,k_n) = \left[(k_I^2 - m_\mu^2)\ H^{(n_1+1)}(\{k_i, i\in I\};k_\lambda)\right]\left[(k^2_{N\setminus I} - m_\mu^2) H^{(n_2+1)}\right.$$

$$\left.(\{k_j,\ j \in N\setminus I\};k_{\underline{\lambda}})\right]$$

which in view of [1] is a general n-point function associated with the tree



$N\setminus I$. H_μ^Γ is analytic in the same domain as $H^{(n)}$ and amputation arguments similar to those used in the proof of proposition 4 allow to conclude that it is analytic in $\mathscr{E}(\hat{\mathscr{D}}(n))$ minus the following set of polar manifolds

$$\{k_J^2 = m_{\mu'}^2;\ J \in \mathscr{P}^*(I),\quad J \in \mathscr{P}^*(N\setminus I), \forall\ \mu'\ ;\quad k_I^2 = m_{\mu'}^2\ ,\quad \mu' \neq \mu\}$$

We shall then show that the two meromorphic functions $-Z_\mu G_\mu^{I,N\setminus I}$ and H_μ^Γ coincide in the complex submanifold $\mathscr{E}(\hat{\mathscr{D}}^{(n)}) \cap \mathscr{M}_{I,\mu}$.

First we notice that the left-hand (resp. right-hand) side of (21) is the boundary value inside the given tube $\mathscr{T}^{\mathscr{S}_1\mathscr{S}_2}$ of the analytic function $\Delta^I H^{(n)}(p_I;k')\Big|_{\mathscr{M}_{I,\mu}^+}$ (resp. $H_\mu^\Gamma(p_I;k')\Big|_{\mathscr{M}_{I,\mu}^+}$). As a consequence of the edge of the wedge theorem, (21) then implies the coincidence of the corresponding analytic functions throughout their common domain $\mathscr{E}(\hat{\mathscr{D}}^{(n)}) \cap \mathscr{M}_{I,\mu}^+$, namely :

$$\frac{Z_\mu}{2i\pi}\,\Delta^I H^{(n)}(p_I;k') = \delta_\mu^+(p_I)\ H_\mu^\Gamma(p_I;k')$$

which yields, in view of (19) :

$$-Z_\mu G_\mu^{I,N\setminus I}(p_I;k') = H_\mu^\Gamma(p_I;k')$$

inside $\mathscr{E}(\hat{\mathscr{D}}^{(n)}) \cap \mathscr{M}_{I,\mu}^+$. Through analytic continuation in k_I, this holds in the whole domain $\mathscr{E}(\hat{\mathscr{D}}^{(n)}) \cap \mathscr{M}_{I,\mu}$ and we have the following set of relations linking the various residue functions (due to the expression of H_μ^Γ and to (18)) :

$$G_\mu^{I,N\setminus I} = -\frac{G_\mu^{I,\{\lambda\}}\ G_\mu^{\{\lambda\},N\setminus I}}{Z_\mu} \tag{22}$$

Remark :

If either I or $N\setminus I$ contains a single element, (22) is reduced to (20).

We can then state :

Theorem 1. (Factorization of residues)

The various residue functions $G_{\mu}^{I,N\setminus I}$ of the n-point functions $H^{(n)}$ on the polar manifolds $\mathcal{M}_{I,\mu}$ satisfy the following set of relations :

$$G_{\mu}^{\{1\},\{2\}} = - Z_{\mu}$$

$$G_{\mu}^{I,N\setminus I} = - \frac{G_{\mu}^{I,\{\lambda\}} . G_{\mu}^{\{\lambda\},N\setminus I}}{Z_{\mu}} \qquad (23)$$

IV.2 The one-p.i. functions.

In this section our purpose is to extract the one-particle singularities from the n-point function $H^{(n)}$ in one given channel $(I,N\setminus I)$. In other words we want to define a function $F^{I,N\setminus I}$ enjoying the following properties :

i) $F^{I,N\setminus I}$ is a general n-point function

ii) Its coincidence region in the channel $(I,N\setminus I)$ has the form

$$\hat{\mathcal{R}}_I = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : p_I^2 < 4m^2\} ,$$

2m being the mass threshold of the continum. Actually such a function is analytic inside the manifolds $\mathcal{M}_{I,\mu}$ for all values of μ. We shall say that it is one-particle irreducible with respect to the channel $(I,N\setminus I)$.

As shown in Proposition 4, the amputation procedure yields such one-p.i. functions. However in the cases when $|I|$ and $|N\setminus I|$ are larger than one, the factorization of residues allows a more interesting construction of one-p.i. functions.

In fact let us consider any general two-point function $\Pi(k)$ having simple zeros at all values $p^2 = m_{\mu}^2$ and such that $\Pi(p) \sim - \frac{1}{Z_{\mu}} (p^2 - m_{\mu}^2)$ at each of these points. We can prove :

Theorem 2.

For any channel $(I,N\setminus I)$ with n arbitrary and $|I| > 1$, $|N\setminus I| > 1$ the function

$$F^{I,N\setminus I}(k_1,\ldots,k_n) = H^{(n)}(k_1,\ldots,k_n) - H^{(n_1+1)}(\{k_j, j\in I\};k_\lambda)\ \Pi(k_\lambda)\ldots$$

$$\ldots H^{(n_2+1)}(\{k_j, j\in N\setminus I\};k_{\underline{\lambda}}) \qquad (24)$$

is a general n-point function, one-particle irreducible with respect to this channel.

Proof :

The function H^{Γ} subtracted from $H^{(n)}$ in (24) has the same properties as the H^{Γ}_{μ}'s introduced in the proof of Theorem 1 : as a result of the study of tree-products performed in [1], it is a general n-point function. Moreover from our assumption on the zeros of π, it admits all the sets $\mathcal{M}_{I,\mu}$ in the channel $(I,N\setminus I)$ as simple polar manifolds with the corresponding residue functions

$$\frac{-G^{I,\{\lambda\}}_{\mu}\ G^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}_{\mu}}{Z_{\mu}} \quad .$$

Therefore, in view of Theorem 1, these residues cancel those of $H^{(n)}$ in (24) and the theorem is proved.

A natural choice of a function Π satisfying the above conditions is $\Pi = \left[H^{(2)}\right]^{-1}$. Actually a formal definition of one-p.i. functions can be found in perturbation theory as the sum of all "proper" diagrams (i.e. with no internal line carrying the four-momentum k_I) occurring in the expansion of any n-point Green's function. It turns out that the various objects thus introduced are linked with the original Green's functions by the same linear relations as (24), satisfied as formal series of Feynmann graphs, with the special choice $\Pi = \left[H^{(2)}\right]^{-1}$. Following the perturbative theory as an heuristic guide we shall choose these relations as definitions and call "physical" one-p.i. n-point functions the special set of functions $F^{I,N\setminus I}$ thus exhibited.

However this has the disadvantage of producing new singularities induced by the zeros of the two-point function. From Lorentz invariance, it is known that such polar manifolds have the form $p_I^2 = \alpha_\nu$, with α_ν lying in the cut-plane

$\{z \neq 4m^2 + \rho, \quad \rho > 0\}$. They were called non-C.D.D. singularities by Symanzik : their number is finite and equal to the number of substractions in the Källen-Lehmann representation of $H^{(2)}$. Moreover α_ν can always be chosen real between 0 and m^2 : see [3] and below in section IV.3.

As for the occurrence of proper C.D.D. singularities which correspond to zeros of $H^{(2)}$ on the cut $\{p_I^2 = 4m^2 + \rho, \quad \rho \geq 0\}$, it does not prevent $F^{I,N\setminus I}$ to have boundary values in the sense of distributions and to satisfy the algebraic structure (Steinmann relations) of a general n-point function.

Finally let us list the relations extracted from the perturbative framework which we shall choose as definitions of the complete set of functions $F^{I,N\setminus I}$:

i) $|I| = |N\setminus I| = 1$

$$F^{\{1\},\{2\}} = -\left[H^{(2)}\right]^{-1} \tag{25a}$$

(this is the perturbative definition of the self-energy)

ii) $|I| = 1, \quad |N \setminus I| \neq 1$

$$F^{\{i\},\ N\setminus\{i\}}(k_1,\ldots,k_n) = \left[H^{(2)}(k_i)\right]^{-1} H^{(n)}(k_1,\ldots,k_n) \tag{25b}$$

iii) $|I| \neq 1, \quad |N \setminus I| \neq 1$

$$F^{I,N\setminus I}(k_1,\ldots,k_n) = H^{(n)}(k_1,\ldots,k_n) - H^{(n_1+1)}(\{k_{i,\, i\in I}\};k_\lambda)$$

$$F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}(k_{\underline{\lambda}};\ \{k_{j,\, j\in N\setminus I}\}) \tag{25c}$$

Note that (25c) is a variant of (24) in the special case $\Pi = \left[H^{(2)}\right]^{-1}$ and can also be written :

$$F^{I,N\setminus I}(k_1,\ldots,k_n) = H^{(n)}(k_1,\ldots,k_n) - F^{I,\{\lambda\}}(\{k_{i,\, i\in I}\};k_\lambda) H^{(n_2+1)}(k_{\underline{\lambda}};\{k_{j,\, j\in N\setminus I}\})$$

Finally in view of proposition 4 and Theorem 2, we can state :

Proposition 5

The functions $F^{I,N\setminus I}$ thus introduced satisfy all the properties of general n-point functions except for a finite set of poles $\{k_I^2 = \alpha_\nu\}$ due to the zeros of $H^{(2)}$; they are one-particle irreducible in the channel $(I,N\setminus I)$.

Note that the definitions (25c) can be illustrated as follows :

and also

IV.3. Complements on the zeros of $H^{(2)}$.

Proposition 6.

The set of retarded operators $R(x_1; x_2,\ldots,x_n)$ introduced in Postulate C can always be chosen so that the two-point function $H^{(2)}$ has a finite number of real zeros $\{k^2 = \alpha_\nu\}$ in its analyticity domain with $0 < \alpha_\nu < \inf_\mu m_\mu^2$. Then $\left[H^{(2)}\right]^{-1}$ is a general two-point function which is analytic in $\{k \in \mathbb{C}^4 : k^2 \neq \alpha_\nu, \forall\ \nu\ ;\ k^2 \neq 4m^2 + \rho,\ \rho \geq 0\}$ and has temperate boundary values on the real.

Proof.

Postulates A determine the Källen-Lehmann measure $\Delta H^{(2)} = \rho$ with $\rho(p^2) = C^{te} \langle \Omega\ ,\ A(p)\ A(-p)\ \Omega \rangle$. From ρ we can construct a function $\tilde{H}^{(2)}(k^2)$ in the following way :

$$\tilde{H}^{(2)}(k^2) = g(k^2)\ P(k^2) \quad \text{with} \quad g(z) = \int \frac{\rho(t)\ dt}{P(t)\ (t-z)} \tag{26}$$

Here $P(t)$ is a polynomial which is positive for $t \geq 4m^2$ and whose degree is sufficient for the convergence of (26). If it is chosen with a finite number of real zeros inside $]0, \inf_\mu m_\mu^2[$, it is clear that $\tilde{H}^{(2)}$ satisfies the same property.

Let $H^{(2)}$ denote the two-point function associated with the retarded and advanced operators $R(x,y)$ and $A(x,y)$ of Postulate C. Then $\left[H^{(2)} - \tilde{H}^{(2)}\right]$ is a polynomial whose Fourier transform in x-space is a finite sum of derivatives of $\delta(x-y)$ which we denote $Q(x-y)$. Now if we make the substitutions

$$R(x,y) \to R'(x,y) = R(x,y) + Q(x-y)$$

$$A(x,y) \to A'(x,y) = A(x,y) + Q(x-y)$$

all the $R(x_1; x_2,\ldots,x_n)$ with $n > 2$ being unchanged, we obtain a new set of retarded operators satisfying postulate C (indeed the non-linear relations between them only involve the discontinuity of the two-point function). Now it is clear that with such a choice of the two-point function, the factor $\left[H^{(2)}\right]^{-1}$ does not spoil the primitive analytic structure of the one-p.i. functions $F^{I,N\setminus I}$, apart from the possible occurrence of the finite number of real poles $k_I^2 = \alpha_\nu$.

We shall now go back to the case of a single mass m and use the additional technical postulate D (smooth spectral condition) to derive regularity properties of the boundary values of $F^{I,N\setminus I}$ in the region $\sum_{I,N\setminus I} = \{p \in R^{4(n-1)} : p_I^2 > 4m^2\}$.

In view of proposition 3, the real boundary values of $H^{(2)}$ are (Hölder) continuous functions of p and therefore of p^2, for $p^2 \geqslant 4m^2$. Then the set of points p^2 at which $H^{(2)}$ vanishes (the so-called C.D.D. zeros) is a closed set without interior points (if it had any it would contain at least one interval but the vanishing of $H^{(2)}$ there would imply $H^{(2)} \equiv 0$ by analytic continuation). We denote Λ the dense open subset of $\{p \in R^4 : p^2 > 4m^2\}$ in which $H^{(2)}(p) \neq 0$. The boundary values of $\left[H^{(2)}\right]^{-1}$ are continuous in Λ' and we have

Proposition 7.

Let $\mathcal{S}_+$ and $\mathcal{S}_-$ two adjacent cells separated by the partition $(I,N\setminus I)$. The expression

$$F^{I,N\setminus I}_{\mathcal{S}_\pm}(\rho_I; \varphi_1, \varphi_2) = \int F^{I,N\setminus I}_{\mathcal{S}_\pm}(\rho_I, \underline{p}^{(n_1)}, \underline{p}^{(n_2)}) \underline{\varphi}_1(\underline{p}^{(n_1)}) \underline{\varphi}_2(\underline{p}^{(n_2)}) \, d\underline{p}^{(n_1)} \, d\underline{p}^{(n_2)}$$

with $\underline{\varphi}_j \in \mathcal{S}(R^{4(n_j-1)}_{\underline{p}^{(n_j)}})$ and $\underline{p}^{(n_1)}$ (resp $\underline{p}^{(n_2)}$) the barycentric variables of the set $\{p_i, i \in I\}$ (resp. $\{p_j, j \in N \setminus I\}$), is a Hölder continuous function of p_I in the region $\hat{\Gamma}_{I,N\setminus I} = \{p \in R^{4(n-1)} : p_I \in \Lambda\}$

Proof :

i) If $I = \{\lambda\}$, in view of (25b) we write

$$F^{\{\lambda\},N\setminus\{\lambda\}}_{\mathcal{S}_\pm}(p_\lambda;\varphi_2) = \left[H^{(2)}(p_\lambda)\right]^{-1} H^{(n)}_{\mathcal{S}_\pm}(p_\lambda;\varphi_2)$$

From Proposition 3, $H^{(n)}_{\mathcal{S}_\pm}(p_\lambda;\varphi_2)$ is (Hölder)-continuous on $\{p_\lambda : p_\lambda > 4m^2\}$. Since $[H^{(2)}]^{-1}$ admits Hölder continuous boundary values on Λ, the property is proved.

ii) In the general case $|I| > 1$, $|N\setminus I| > 1$, it is the consequence of the definition (25c) and of the previous argument.

V. NON-LINEAR PROPERTIES OF THE ONE-p.i. FUNCTIONS.

In this section we investigate the non-linear properties of the set of "physical" one-p.i. functions $\{F^{I,N\setminus I}\}$ which have been constructed above as the exact analogues of the perturbative formal sums of "proper" Feynmann graphs.

As a consequence of the completeness of asymptotic states, we shall prove that they satisfy a set of non-linear relations similar to the completeness relations described in Section III.3.

More precisely let us recall the definition of the 1-particle region $\sum^{\ell}_{I,N\setminus I}$ associated with a channel $(I,N\setminus I)$:

$$\sum^{\ell}_{I,N\setminus I} = \{p \in R^{4(n-1)} \; : \; \ell^2 m^2 \leqslant p_I^2 < (\ell+1)^2 m^2\} \qquad \text{with } \ell \geqslant 2$$

and define :

$$\hat{\sum}^{\ell}_{I,N\setminus I} = \{p \in R^{4(n-1)} \; : \ell^2 m^2 \leqslant p_I^2 < (\ell+1)^2 m^2 \; ; \; H^{(2)}(p_I) \neq 0\}$$

that is, we discard those exceptional values corresponding to C.D.D. zeros. $\hat{\sum}^{\ell}_{I,N\setminus I}$ is a dense open subset of $\sum^{\ell}_{I,N\setminus I}$ and we have :

$$\hat{\sum}_{I,N\setminus I} = \bigcup_{\ell \geqslant 2} \hat{\sum}^{\ell}_{I,N\setminus I}$$

In this section an equivalence will be proved (theorem 3) between the completeness relations

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)} = \sum_{k=2}^{\ell} \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^k \frac{1}{k!} \hat{H}^{(n_1+k)}_{K\uparrow\mathcal{S}_1} * \hat{H}^{(n_2+k)}_{\underline{K}\uparrow\mathcal{S}_2} = \sum_{k=2}^{\ell} \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^k \frac{1}{k!} \hat{H}^{(n_1+k)}_{K\downarrow\mathcal{S}_1} * \hat{H}^{(n_2+k)}_{\underline{K}\downarrow\mathcal{S}_2}$$

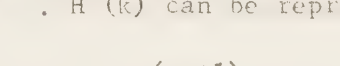
satisfied on the relevant regions $\hat{\sum}^{\ell}_{I,N\setminus I}$ (here $n_1 = |I|$ and $n_2 = |N\setminus I|$; $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$) is any cell of I (resp. $(N\setminus I)$)) and the following set of relations

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} F^{I,N\setminus I} = \sum_{k=2}^{\ell} \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^k \frac{1}{k!} \hat{F}^{I,K}_{K\uparrow\mathcal{S}_1} * \hat{F}^{\underline{K},N\setminus I}_{\underline{K}\uparrow\mathcal{S}_2} = \sum_{k=2}^{\ell} \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^k \frac{1}{k!} \hat{F}^{I,K}_{K\downarrow\mathcal{S}_1} * \hat{F}^{\underline{K},N\setminus I}_{\underline{K}\downarrow\mathcal{S}_2} \qquad (27)$$

satisfied on the same regions $\hat{\sum}^{\ell}_{I,N\setminus I}$.

The non-linear information of general quantum field theory originally known through the completeness relations (11) in terms of the various boundary values and absorptive parts of the n-point functions will then be expressed (up to the manifolds corresponding to C.D.D. zeros) in terms of the one-p.i. objects, a result which will be needed extensively in the following of the program[23].

This equivalence is actually the consequence of an algebraic algorithm which will be described below. However at present it is not known how to give it a rigorous meaning in the sense of product of distributions without making the technical "smoothness postulate" D. Used under the form of proposition 3 and 7 the latter allows one to derive the following simple results which will be needed for a rigorous proof of (27).

Consider the tree-product $H^{\Gamma}(k_1,\ldots,k_n)$ which is occurring in the definition (25c) of $F^{I,N\setminus I}$. $H^{\Gamma}(k)$ can be represented as $I\{$  $\}\, N\setminus I$ that is :

$$H^{\Gamma}(k_1,\ldots,k_n) = H^{(n_1+1)}(\{k_{j,j\in I}\};k_\lambda).F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}(k_{\underline{\lambda}};\{k_{j,j\in N\setminus I}\})$$

In the following we shall need to express its absorptive parts $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}H^{\Gamma}$ in the channel $(I,N\setminus I)$. We shall prove :

Proposition 8.

The absorptive part $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}H$ is given (in the sense of distributions) by the following rule :

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}H^{\Gamma} = \Delta_{\mathcal{S}_1,\{\lambda\}}H^{(n_1+1)}.F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}_{\underline{\lambda}\uparrow\mathcal{S}_2} + H^{(n_1+1)}_{\lambda\uparrow\mathcal{S}_1}.\Delta_{\{\underline{\lambda}\},\mathcal{S}_2}F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I} \qquad (28a)$$

or equivalently

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}H^{\Gamma} = \Delta_{\mathcal{S}_1,\{\lambda\}}H^{(n_1+1)}.F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}_{\underline{\lambda}\downarrow\mathcal{S}_2} + H^{(n_1+1)}_{\lambda\downarrow\mathcal{S}_1}.\Delta_{\{\underline{\lambda}\},\mathcal{S}_2}F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I} \qquad (28b)$$

Proof :

From propositions 3 and 7 we know that (after testing in the external variables $\{p_i,\ i \in I\}$, $\{p_j,\ j \in N \setminus I\}$) $H^{(n+1)}_{\lambda \downarrow s}$ is a Hölder-continuous function of p_λ and $F^{\{\lambda\},N\setminus I}_{\lambda \downarrow s}$ a Hölder continuous function of p_λ except at those exceptional values corresponding to C.D.D. zeros. We are then led to compute $\Delta(fg) = f_+ g_+ - f_- g_-$ in the sense of two continuous functions on the open set $\hat{\sum}_{I,N\setminus I}$, namely

$$\Delta(fg) = \Delta f . g_+ + f_- . \Delta g = \Delta f . g_- + f_+ . \Delta g$$

which gives sense to (28a) and (28b).

We now need to investigate the properties of the restrictions to the mass-shell of the amputated one-p.i. functions, as it was done in section III.3 for the original n-point functions H^n.

Indeed, once these restrictions are well-defined as square-integrable functions in the mass-shell variables, the operation $*$ becomes meaningful at the right-hand side of (27) (as an integral of the product of two square integrable functions, after testing in the external variables, i.e. in the same sense as in (I1)).

Let us consider for any given cell $K \downarrow s_2 \in S(K \cup (N \setminus I))$ (with $|K| = k \geqslant 2$, $|N \setminus I| = n_2$) the real boundary value $F^{K,N\setminus I}_{K \downarrow s_2}(p_1,\ldots,p_k\ ;\ \underline{p}')$ of the analytic function $F^{K,N\setminus I}$; here (as in section III.5) it is more convenient to adopt the notation of independent variables $(p_1,\ldots,p_k\ ;\ \underline{p}')$ in which $\underline{p}'$ denotes the set of barycentric four-vector variables associated with $(N \setminus I)$, namely :

$$\underline{p}' = \{\underline{p}'_i\ ,\ i \in N \setminus I\ ;\ \sum_{i \subset N\setminus I} \underline{p}'_i = 0\} \in R^{4(n_2-1)}$$

with

$$\underline{p}'_i = p'_i - \frac{p'_{N\setminus I}}{n_2} \quad ; \quad p'_{N\setminus I} = -\sum_{j=1}^{k} p_j$$

In view of (25), we have :

- if $N \setminus I = \{\lambda\}$ $(n_2 = 1)$:

$$F^{K,\{\lambda\}}_{K\downarrow\lambda}(p_1,\ldots,p_k) = H^{(k+1)}_{K\downarrow\lambda}(p_1,\ldots,p_k)\cdot\left[H^{(2)}\Big(\sum_{j=1}^{k} p_j\Big)\right]^{-1} \qquad (29a)$$

or in a brief algebraic notation : $F^{K,\{\lambda\}}_{K\downarrow\lambda} = H^{(k+1)}_{K\downarrow\lambda}\cdot\left[H^{(2)}_{\underline{\lambda}\downarrow\lambda}\right]^{-1}$

- if $n_2 > 1$:

$$F^{K,N\setminus I}_{K\downarrow\mathcal{S}_2}(p_1,\ldots,p_k\ ;\ \underline{p}') = H^{(n_2+k)}_{K\downarrow\mathcal{S}_2}(p_1,\ldots,p_k\ ;\ \underline{p}') - H^{k+1}_{K\downarrow\lambda}(p_1,\ldots,p_k) \qquad (29b)$$

$$\ldots\ F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}_{\underline{\lambda}\downarrow\mathcal{S}_2}(\underline{p}')$$

or in brief : $F^{K,N\setminus I}_{K\downarrow\mathcal{S}_2} = H^{(n_2+k)}_{K\downarrow\mathcal{S}_2} - H^{(k+1)}_{K\downarrow\lambda}\cdot F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}_{\underline{\lambda}\downarrow\mathcal{S}_2}$

In these formulae, the product of distributions which occurs at the right-hand side is defined as the boundary value of the corresponding product of analytic functions in the tube $\mathcal{T}_{K\downarrow\mathcal{S}_2}$.

We now want to define correctly the mass-shell restrictions $(p_j^o = \omega_j\ ;\ j \in K)$ of the equations (29a), (29b), after multiplication of both sides by $\prod_{j=1}^{k}(p_j^2 - m^2)$; in particular, some work will have to be done to prove that the restriction of the products can be computed as products of functions (see proposition 9 below) : here the difficulty arises from the fact that the complex mass-shell is not transverse to the tube $\mathcal{T}_{K\downarrow\mathcal{S}_2}$.

We first have :

lemma 3

It is meaningful to define the following distributions in the open set $\Omega' \times \mathbb{R}^{4(n_2-1)}_{(\underline{p}')}$:

$$\hat{F}^{K,N\setminus I}_{K\downarrow\mathcal{S}_2}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k\ ;\ \underline{p}') = \prod_{j=1}^{k}(p_j^2 - m^2)\ F^{K,N\setminus I}_{K\downarrow\mathcal{S}_2}(p_1,\ldots,p_k\ ;\ \underline{p}')\ \Big|_{\substack{p_j^o = \omega_j \\ 1 \leqslant j \leqslant k}} \qquad (30)$$

here Ω' denotes, as in section III.3 the set of non-overlapping configurations in $(V_m^+)^k$.

Proof :

Let us put : $\left(F^{K,N\setminus I}\right)^{amp} = \prod_{j=1}^{k}(k_j^2 - m^2)F^{K,N\setminus I}$. In view of theorem 2 $\left(F^{K,N\setminus I}\right)^{amp}$ is a general $(k + n_2)$ - point function ; it moreover satisfies the same coincidence relations as $\left(H^{(n_2+k)}\right)^{amp}$ in all channels $\left(\{j\}, [K \cup (N\setminus I)]\setminus\{j\}\right)$ $(\forall\, j \in K)$. Therefore proposition B-5 applies to $\left(F^{K,N\setminus I}\right)^{amp}$ and yields the announced result ; the latter is independent of postulate D.

Let us now define a dense open subset Λ_K of $(H_m^+)^k$ by :

$\Lambda_K = \{p \in R^{4k} : p_j \in H_m^+ ; H^{(2)}(p_K) \neq 0\}$; Λ_K is the set of all "non C.D.D." mass-shell configurations. Then on the basis of postulate D, we have :

Proposition 9 :

i) On any open subset of $(H_m^+)^k$ with compact closure in Λ_K, the distributions $\hat{F}^{K,\{\lambda\}}_{K\downarrow\lambda}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k)$ and $\varphi\hat{F}^{K,N\setminus I}_{K\downarrow\mathcal{S}_2}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k) = \int \hat{F}^{K,N\setminus I}_{K\downarrow\mathcal{S}_2}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k\ ;\ \underline{p}')\ \varphi(-\underline{p}')\ d\underline{p}'$ can be identified with square-integrable functions (with respect to the measure $\prod_{j=1}^{k}\frac{d\vec{p}_j}{2\omega_j}$).

ii) On Λ_K the following relations hold in the sense of products of square integrable functions by bounded continuous functions :

- if $N\setminus I = \{\lambda\}$ $(n_2 = 1)$:

$$\hat{F}^{K,\{\lambda\}}_{K\downarrow\lambda}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k) = \hat{H}^{(k+1)}_{K\downarrow\lambda}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k)\cdot\left[H^{(2)}\left(\vec{p}_K, \sum_{j=1}^{k}\omega_j\right)\right]^{-1} \qquad (31a)$$

or in brief :

$$\hat{F}^{K,\{\lambda\}}_{K\downarrow\lambda} = \hat{H}^{(k+1)}_{K\downarrow\lambda}\cdot\left[H^{(2)}_{\Delta\downarrow\lambda}\right]^{-1}$$

- if $n_2 > 1$: $\forall\ \varphi \in \mathcal{S}\left(R^{4(n_2-1)}_{(\underline{p}')}\right)$,

$$\varphi\hat{F}^{K,N\setminus I}_{K\downarrow\mathcal{S}_2} = \varphi\hat{H}^{(n_2+k)}_{K\downarrow\mathcal{S}_2} - \hat{H}^{(k+1)}_{K\downarrow\lambda}\cdot\varphi\hat{F}^{\{\lambda\},N\setminus I}_{\lambda\downarrow\mathcal{S}_2} \qquad (31b)$$

where

$$\varphi H^{(n_2+k)}_{K\downarrow\mathcal{S}_2}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k) = \int H^{(n_2+k)}_{K\downarrow\mathcal{S}_2}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_k\ ;\ \underline{p}')\ \varphi(-\underline{p}')\ d\underline{p}'$$

Proof : By definition of the one-p.i. function, we have :

$$\left(F^{K,\{\lambda\}}\right)^{amp}(p + i\varepsilon) = \left(H^{(k+1)}\right)^{amp}(p + i\varepsilon) \cdot \left[H^2(p_K + i\varepsilon_K)\right]^{-1} \quad , \qquad (32)$$

both sides being analytic in the advanced tube $\mathcal{T}_{K\downarrow\lambda} = \{p+i\varepsilon \; ; \; \varepsilon_j \in V^+, \forall\, j\in K\}$, and yielding the boundary value :

$$\left(F^{K,\{\lambda\}}_{K\downarrow\lambda}\right)^{amp}(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(F^{K,\{\lambda\}}\right)^{amp}(p + i\varepsilon) \qquad . \qquad (33)$$

Let now $\hat{p}$ be an arbitrary point in $\Lambda_K \cap \Omega'$, and

$$\left(H^{(k+1)}\right)^{amp} = \sum_{\beta} h_\beta \qquad (34)$$

be a local decomposition of $\left(H^{k+1}\right)^{amp}$ in a neighbourhood of $\hat{p}$; according to proposition B-6, the h'_βs can be chosen to be analytic in local tubes T'_β s such that :

- $\hat{T}_\beta = T_\beta \cap \mathcal{M}_c \neq \emptyset$ ($\mathcal{M}_c$ being the complexified $(H_m^+)^k$)
- $\bigcap_\beta T_\beta$ contains a local restriction at $\hat{p}$ of $\mathcal{T}_{K\downarrow\lambda}$
- each T_β is contained in the domain of $\left[H^2(p_K)\right]^{-1}$.

Let us then call $\hat{h}_\beta = h_{\beta\,|\mathcal{M}_c}$, $\left[\hat{H}^2\right]^{-1} = \left[H^2(p_K)\right]^{-1}_{|\mathcal{M}_c}$; in view of (32), (33), (34) and of the above properties of the h'_βs, we can write, by definition of $F^{K,\{\lambda\}}_{K\downarrow\lambda}$:

$$\hat{F}^{K,\{\lambda\}}_{K\downarrow\lambda} = \sum_\beta \text{b.v.}\left(\hat{h}_\beta \cdot \left[\hat{H}^2\right]^{-1}\right) \qquad (35)$$

where the boundary values (b.v.) at the right-hand side are taken from the local tubes $\hat{T}_\beta$ (in $\mathcal{M}_c$).

But according to Appendix A, the right-hand side of (35) defines precisely the product of distributions $\hat{H}^{(k+1)}_{K\downarrow\lambda} \cdot \left[H^2_{\downarrow\lambda}\right]^{-1}$ in a mass-shell neighbourhood U of p (with $U \subset \Lambda_K \cap \Omega'$).

Now we know from lemma 1 and proposition 3 that $\hat{H}^{(k+1)}_{K\downarrow\lambda}$ and $\left[H^{(2)}_{\underline{\lambda}\downarrow\lambda}\right]^{-1}$ can be identified respectively with a square integrable function and a bounded continuous function which is the uniform limit of an analytic function (U must be chosen compact in Λ_K for the latter to hold). Then proposition A-5 ensures that the product of distributions $\hat{H}^{k+1}_{K\downarrow\lambda} \cdot \left[H^{(2)}_{\underline{\lambda}\downarrow\lambda}\right]^{-1}$ can be identified on U with the corresponding ordinary product of functions. So this proves (34) on $\Lambda_K \cap \Omega'$, and therefore on Λ_K since $\left[H^{(2)}_{\underline{\lambda}\downarrow\lambda}\right]^{-1}$ is continuous in the whole set Λ_K, and $\Lambda_K \cap \Omega$ is of measure zero in Λ_K ; moreover the latter product is itself a square integrable function on every compact subset of Λ_K, which is the result stated in part i).

A similar argument holds in the case of a general set N\I, since in view of proposition 7, the function $\varphi\hat{F}^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}_{\underline{\lambda}\downarrow s_2}$ has the same properties as the two-point function $\left[H^2\right]^{-1}$; this ends the proof of proposition 9.

Finally let us consider the following convolution product

$I\left\{\right.$ $\left.\right\}$ N\I associated with the distribution

$\left[\hat{H}^{(n_1+k)}_{K\downarrow s_1} * \hat{H}^{(k+1)}_{\underline{K}\downarrow\lambda}\right] \cdot F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}_{\underline{\lambda}\downarrow s_2}$ (which has now a precise meaning). We shall make below an extensive use of the following associativity and distributivity properties which are straightforward :

$$\text{i)} \quad \left[\hat{H}^{(n_1+k)}_{K\downarrow s_1} * \hat{H}^{(k+1)}_{\underline{K}\downarrow\lambda}\right] \cdot F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}_{\underline{\lambda}\downarrow s_2} = \hat{H}^{(n_1+k)}_{K\downarrow s_1} * \left[\hat{H}^{(k+1)}_{\underline{K}\downarrow\lambda} \cdot F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}_{\underline{\lambda}\downarrow s_2}\right] \qquad (36)$$

$$\text{ii)} \quad \hat{H}^{(n_1+k)}_{K\downarrow s_1} * \hat{H}^{(k+1)}_{\underline{K}\downarrow\lambda} \cdot F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}_{\underline{\lambda}\downarrow s_2} = \hat{H}^{(n_1+k)}_{K\downarrow s_1} * \hat{H}^{(n_2+k)}_{\underline{K}\downarrow s_2} - \hat{H}^{(n_1+k)}_{F\downarrow s_1} * \hat{F}^{\underline{K},N\setminus I}_{\underline{K}\downarrow s_2} \qquad (37)$$

Actually, in view of propositions 3, 7 and 9, these are readily obtained in the sense of products of functions square integrable by bounded continuous ones (after testing in the external variables). Now we are in a position to prove the

Theorem 3

The various boundary values and absorptive parts of all the one-p.i. n-point functions $\{F^{I,N\setminus I}\}$ constructed in section IV.2 satisfy (in the sense of distributions) the following set of non-linear relations :

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} F^{I,N\setminus I} = \sum_{k=2}^{\ell} \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^k \frac{1}{k!} \hat{F}^{I,K}_{K\downarrow\mathcal{S}_1} * \hat{F}^{K,N\setminus I}_{\underline{K}\downarrow\mathcal{S}_2} = \sum_{k=2}^{\ell} \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^k \frac{1}{k!} \hat{F}^{I,K}_{K\downarrow\mathcal{S}_1} * \hat{F}^{\underline{K},N\setminus I}_{\underline{K}\downarrow\mathcal{S}_2} \qquad (27)$$

on the relevant ℓ-particle region :

$$\hat{\sum}^{\ell}_{I,N\setminus I} = \{p \in R^{4(n-1)} : \ell^2 m^2 \leq p_I^2 < (\ell+1)^2 m^2 \; ; \; H^{(2)}(p_I) \neq 0\} \quad .$$

Here $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$) is any cell of I (resp. $N\setminus I$) ; the various distributions occurring on the right-hand side are defined as in lemma 3, and their product is meaningful in the sense of square-integrable functions (proposition 9).

Moreover the complete set of these relations (27) on the relevant sets $\hat{\sum}^{\ell}_{I,N\setminus I}$ is equivalent with all the original completeness relations (11) expressed in the same regions.

Proof :

We shall stick to the case of "negative" arrows . (The proof would go similarly in the other case). First we define for all channels $(I,N\setminus I)$:

$$\Theta_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2} = \Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)} - \sum_{k=2}^{\ell} C_k \hat{H}^{(n_1+k)}_{K\downarrow\mathcal{S}_1} * \hat{H}^{(n_2+k)}_{\underline{K}\downarrow\mathcal{S}_2}$$

with $C_k = \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^k \frac{1}{k!}$ and similarly

$$\Theta^1_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2} = \Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} F^{I,N\setminus I} - \sum_{k=2}^{\ell} C_k \hat{F}^{I,K}_{K\downarrow\mathcal{S}_1} * \hat{F}^{\underline{K},N\setminus I}_{\underline{K}\downarrow\mathcal{S}_2}$$

i) Then we start from the definition of the one-p.i. two-point function :

$$F^{\{1\},\{2\}} = -\left[H^{(2)}\right]^{-1}$$

which yields (in view of proposition 3)

$$\Delta_{\{1\},\{2\}} F^{\{1\},\{2\}} = \left[H^{(2)}_{2\downarrow 1}\right]^{-1} \Delta_{\{1\},\{2\}} H^{(2)} \left[H^{(2)}_{1\downarrow 2}\right]^{-1}$$

This can be rewritten :

$$\Delta_{\{1\},\{2\}} F^{\{1\},\{2\}} = \left[H^{(2)}_{2\downarrow 1}\right]^{-1}\left[\Delta_{\{1\},\{2\}} H^{(2)} - \sum_{k=2}^{\ell} C_k \, \hat{H}^{(k+1)}_{K\downarrow 1} * \hat{H}^{(k+1)}_{\underline{K}\downarrow 2}\right]\left[H^{(2)}_{1\downarrow 2}\right]^{-1}$$

$$+ \left[H^{(2)}_{2\downarrow 1}\right]^{-1}\left[\sum_{k=2}^{\ell} C_k \, \hat{H}^{(k+1)}_{K\downarrow 1} * \hat{H}^{(k+1)}_{\underline{K}\downarrow 2}\right]\left[H^{(2)}_{1\downarrow 2}\right]^{-1}$$

Then in view of proposition 9 and (36), the last bracket can be rewritten :

$$\sum_{k=2}^{\ell} C_k \, \hat{F}^{\{1\},K}_{K\downarrow 1} * \hat{F}^{\underline{K},\{2\}}_{\underline{K}\downarrow 2}$$

which yields

$$\overset{*}{\Theta}{}^{1}_{\{1\},\{2\}} = \left[H^{(2)}_{2\downarrow 1}\right]^{-1} \Theta_{\{1\},\{2\}}\left[H^{(2)}_{1\downarrow 2}\right]^{-1} \qquad (38a)$$

ii) When (for instance) I is reduced to one element {i}, we start from the definition of $F^{\{i\},N\setminus\{i\}}$ to derive :

$$F^{\{i\},N\setminus\{i\}}_{i\downarrow\mathcal{S}_2} = - F^{\{i\},\{\underline{i}\}}_{i\downarrow\underline{i}} \cdot H^{(n)}_{i\downarrow\mathcal{S}_2}$$

Taking into account proposition 8, this yields

$$\Delta_{\{i\},\mathcal{S}_2} F^{\{i\},N\setminus\{i\}} = \left[H^{(2)}_{\underline{i}\downarrow i}\right]^{-1} \cdot \Delta_{\{i\},\mathcal{S}_2} H^{(n)} - \Delta_{\{i\},\{\underline{i}\}} F^{\{i\},\{\underline{i}\}} \cdot H^{(n)}_{i\downarrow\mathcal{S}_2}$$

This can be rewritten

$$\Delta_{\{i\},\mathcal{S}_2} F^{\{i\},N\setminus\{i\}} = \left[H^{(2)}_{\underline{i}\downarrow i}\right]^{-1} \cdot \Theta_{\{i\},\mathcal{S}_2} - \overset{1}{\Theta}_{\{i\},\{\underline{i}\}} \cdot H^{(n)}_{i\downarrow\mathcal{S}_2} +$$

$$\left[H^{(2)}_{\underline{i}\downarrow i}\right]^{-1}\left[\sum_{k=2}^{\ell} C_k \, \hat{H}^{(k+1)}_{K\downarrow i} * \hat{H}^{(k+n_2)}_{\underline{K}\downarrow\mathcal{S}_2}\right] - \left[\sum_{k=2}^{\ell} C_k \, \hat{F}^{\{i\},K}_{K\downarrow i} * \hat{F}^{\underline{K},\{\underline{i}\}}_{\underline{K}\downarrow\underline{i}}\right] H^{(n)}_{i\downarrow\mathcal{S}_2}$$

But the last two terms of the right-hand side can be rewritten using relations (31) and (36) :

$$\sum_{k=2}^{\ell} C_k \; \hat{F}^{\{i\},K}_{K\downarrow i} * \hat{F}^{\underline{K},N\setminus\{i\}}_{\underline{K}\downarrow \mathcal{S}_2}$$

and finally we get

$$\Theta^1_{\{i\},\mathcal{S}_2} = \left[H^{(2)}_{i\downarrow i}\right]^{-1} \cdot \Theta_{\{i\},\mathcal{S}_2} - \Theta^1_{\{i\},\{i\}} \cdot H^{(n)}_{i\downarrow\mathcal{S}_2} \qquad (38b)$$

iii) We then turn to the general case when $|I|$ (resp. $|N\setminus I|$) is different from one. From the definition (25c) and from proposition 8, we get :

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} F^{I,N\setminus I} = \Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^{(n)} - \Delta_{\mathcal{S}_1,\{\lambda\}} H^{(n_1+1)} \cdot F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}_{\underline{\lambda}\downarrow\mathcal{S}_2} - H^{(n_1+1)}_{\lambda\downarrow\mathcal{S}_1} \cdot \Delta_{\{\underline{\lambda}\},\mathcal{S}_2} F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}$$

This can be rewritten :

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} F^{I,N\setminus I} = \Theta_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2} - \Theta_{\mathcal{S}_1,\{\lambda\}} \cdot F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}_{\underline{\lambda}\downarrow\mathcal{S}_2} - H^{(n_1+1)}_{\lambda\downarrow\mathcal{S}_2} \cdot \Theta^1_{\{\underline{\lambda}\},\mathcal{S}_2}$$

$$+ \sum_{k=2}^{\ell} C_k \left[\hat{H}^{(n_1+k)}_{K\downarrow\mathcal{S}_1} * \hat{H}^{(n_2+k)}_{\underline{K}\downarrow\mathcal{S}_2} - \left(\hat{H}^{(n_1+k)}_{K\downarrow\mathcal{S}_1} * \hat{H}^{(k+1)}_{\underline{K}\downarrow\lambda}\right) \cdot F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}_{\underline{\lambda}\downarrow\mathcal{S}_2} \right.$$

$$\left. - H^{(n_1+1)}_{\lambda\downarrow\mathcal{S}_1} \cdot \left(\hat{F}^{\{\underline{\lambda}\},K}_{K\downarrow\underline{\lambda}} * \hat{F}^{\underline{K},N\setminus I}_{\underline{K}\downarrow\mathcal{S}_2}\right) \right]$$

Now using relations (36) and (37), the last summation can be rewritten :

$$\sum_{k=2}^{\ell} C_k \; \hat{F}^{I,K}_{K\downarrow\mathcal{S}_1} * \hat{F}^{\underline{K},N\setminus I}_{\underline{K}\downarrow\mathcal{S}_2}$$

which allows to write :

$$\Theta^1_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2} = \Theta_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2} - \Theta_{\mathcal{S}_1,\{\lambda\}} \cdot F^{\{\underline{\lambda}\},N\setminus I}_{\underline{\lambda}\downarrow\mathcal{S}_2} - H^{(n+1)}_{\lambda\downarrow\mathcal{S}_1} \cdot \Theta^1_{\{\underline{\lambda}\},\mathcal{S}_2} \qquad (38c)$$

Putting together relations (38a,b,c) it is then straightforward to check that they form a homogeneous linear system which can be solved by recursion either in the $\Theta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}$ or in the $\Theta^1_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}$. The vanishing of the whole set of the $\Theta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}$ (expressing asymptotic completeness) is therefore equivalent with the vanishing of all the $\Theta^1_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}$, which achieves the proof of the theorem.

VI. ONE-PARTICLE IRREDUCIBILITY IN ALL CHANNELS.

Finally we turn to the definition of a general n-point function which should be one-particle irreducible in all channels (I,N\I), that is to the possibility of a simultaneous extraction of one-particle singularities on the various manifolds $\mathcal{M}_{I,\mu} = \{k_I^2 = m_\mu^2,\ I \in \mathcal{P}^*(N)\}$

This will be done in two steps.

A. First we shall define a general n-point function $F^{(n)}$ which is one-particle irreducible in all channels (I,N\I) with $2 \leqslant |I| \leqslant n-2$. This will be done by recursion over the number n of external variables. First we notice that for $n < 3$ we can trivially define : $F^{(n)} = H^{(n)}$. In a second step, we assume that for any $n < n_o - 1$, it is possible to define a general n-point function $F^{(n)}$ which is one-particle irreducible in all channels $2 \leqslant |I| \leqslant n - 2$. Then we define $F^{(n_o)}$ by the following recursion formula

$$F^{(n_o)} = H^{(n_o)} - \sum_{T \in \mathcal{T}^{(n_o)}} H^T \qquad (39)$$

Here some explanation of the notation is needed : $\mathcal{T}^{(n_o)}$ denotes the set of trees with n_o external lines and any vertex at least three-lined. With any such tree T we associate a convolution-product H^T thus defined [1] :

$$H^T(k) = \prod_v F^{(n_v)}(\{k_j, j \in \mathcal{S}_v\}) \prod_j \left[H^{(2)}(k_j)\right]^{-1} \qquad (40)$$

Here the first product is taken over the vertices of T : with any vertex v incident with n_v lines $\{j \in \mathcal{S}_v\}$ we associate the function $F^{(n_v)}$. Indeed it can be checked that for any v, $n_v < n_o$ so that (39) provides a good recursive definition of $F^{(n_o)}$. The second product is taken over internal lines. Then we can state :

Proposition 10.

$F^{(n_o)}$ is a general n_o-point function.

Proof :

Straightforward in view of the recursion hypothesis, once taken into account the conservation of the primitive structure by tree-convolution ([1], section 4).

Proposition 11

$F^{(n_o)}$ is analytic on any manifold $\mathcal{M}_{I,\mu}$ with $2 < |I| < n_o - 2$.

Proof :

Let us make choice of any such channel $(I, N_o \setminus I)$. From the study of tree-products made in [1], it is clear that for any tree $T \in \mathcal{T}^{(n_o)}$ three situations may occur :

i) $(I, N_o \setminus I)$ is not a vertex partition for T : then it is known ([1], p. 200) that H^T is analytic on $k_I^2 = m_\mu^2$. We call $F_1(k)$ the contribution of all such trees to (39).

ii) $(I, N_o \setminus I)$ is a vertex partition for T, but not a line partition : that is, there exists one vertex v_o of T where it can be realized as a partition $(\mathcal{I}, \mathcal{S}_{v_o} \setminus \mathcal{I})$ of the lines incident to v_o, with $2 \leq |\mathcal{I}| \leq n_{v_o} - 2$. Then H^T is analytic on any manifold $k_I^2 = m_\mu^2$ since the function $F^{(n_{v_o})}$ associated with v_o in (40) is one-particle irreducible in the channel $(\mathcal{I}, \mathcal{S}_{v_o} \setminus \mathcal{I})$. We call $F_2(k)$ the contribution of all such trees to (39).

iii) $(I, N_o \setminus I)$ is associated with an internal line i of T. Then it is easy to check that the summation over this third family of trees yields the tree-product H^Γ introduced in (24). Indeed we must sum on both sides of i and apply the recursion formula (39) with the order $|I| + 1$ (resp $|N_o \setminus I| + 1$) at its two end-points.

Finally we have :

$$F^{(n_o)} = H^{(n_o)} - F_1 - F_2 - H^\Gamma$$

Applying (25c) then yields

$$F^{(n_o)} = F^{I, N_o \setminus I} - F_1 - F_2$$

Now in view of Proposition 5, any function in the right-hand side is known to be regular on $\mathcal{M}_{I,\mu}$; which ends the proof of the recursion property.

B. In a second step we obtain a general n-point function $F_{ir}^{(n)}$ one-particle irreducible in all channels by amputation in all external variables :

$$F_{ir}^{(n)}(k) = \prod_{i=1}^{n} \left[H^{(2)}(k_i) \right]^{-1} F^{(n)}(k)$$

Indeed, as seen in Section IV.1, the amputation in k_i ensures regularity on $k_i^2 = m_\mu^2$. Then $F_{ir}^{(n)}$ is analytic on any manifold $\mathcal{M}_{I,\mu}$, which is the desired result.

VI. FINAL REMARKS.

In this first step of the analytic M.P.S.A. program, we have been led to add a technical postulate (namely postulate D) to the usual axioms of the L.S.Z. field theory. Although this postulate was not necessary to construct one-particle irreducible functions, it played a crucial role in the rigorous derivation of non-linear properties of the latter ; we shall therefore have to keep this postulate (or an equivalent one) in the following of the program.

Concerning the existence of sharp retarded operators, such a postulate was not crucial for the present study, since the mass-shell restrictions which occur in writing completeness relations have only to do with local analyticity properties in momentum space. Actually the sharp character of retarded operators is only linked with increase properties at infinity and is therefore irrelevant in the framework of the local analytic structure of Green's functions. So it is only for convenience that this postulate was assumed here : it allowed us to write completeness equations in their usual form, namely without regularizing factors for the fields.

ACKNOWLEDGEMENTS.

It is a pleasure to thank Prof. R. STORA for an invaluable introduction to the subject some years ago ; we also acknowledge fruitful discussions with Profs. V. GLASER and R. HAAG (in particular, concerning the introduction of the "smooth spectral condition") and with Dr. D. IAGOLNITZER.

APPENDIX A.

Essential supports and local analytic structure of distributions :

We recall very briefly some mathematical facts which are exposed in detail in [26,28].

The essential support of a distribution T(p) in $R^n_{(p)}$ at a point $\hat{p}$ is a certain closed cone $\sum_{\hat{p}}(T)$ with apex at the origin in $R^n_{(x)}$ (the dual space of $R^n_{(p)}$) which can be defined in terms of the exponential decrease properties of a certain "generalized Fourier transform" of T ; the interest of this notion is that it allows a simple and intrinsic description of the local analytic structure of T in the neighbourhood of $\hat{p}$.

Here it is sufficient to know that if $\sum_{\hat{p}}(T)$ is contained in the union of a finite family of open convex cones $\tilde{\mathscr{C}}_\beta$, then there exists a neighbourhood $\mathscr{U}(\hat{p})$ of $\hat{p}$ in which :

$$T(p) = \sum_\beta T_\beta(p) \qquad (1)$$

with β , $T_\beta(p) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \in \mathscr{C}_\beta}} F_\beta(p + i\varepsilon)$

here F_β denotes an analytic function in a local tube $\mathscr{T}_\beta = \mathscr{U}(\hat{p}) + i\,\mathscr{C}_\beta \cap B_\rho$; $\mathscr{C}_\beta$ is the interior of the dual cone of $\tilde{\mathscr{C}}_\beta$, and B_ρ is a ball with radius ρ centered at the origin. The decomposition (1) is highly non-unique, when $\sum_\beta$ is not reduced to a single term.

In order to determine $\sum_{\hat{p}}(T)$ - or at least a "majorization" of it (i.e. a cone which contains $\sum_{\hat{p}}(T)$) - one can make use of the following facts

Proposition A.1 : for any distribution T' which coincides with T in a neighbourhood of $\hat{p}$, one has

$$\sum_{\hat{p}}(T') = \sum_{\hat{p}}(T)$$

Proposition A.2 : if the Fourier transform $\tilde{T}$ of T has its support contained in a closed cone Γ (with apex at the origin, or more generally in $a + \Gamma$, a being a fixed vector), then $\sum_{\hat{p}}(T) \subset \Gamma$.

The possibility of defining the local restriction of T to an arbitrary submanifold $\mathcal{M}$ containing the point $\hat{p}$ is ruled by the followings

Proposition A.3 : let $\mathcal{N}_{\hat{p}}$ be the normal submanifold to $\mathcal{M}$ at $\hat{p}$ ($\mathcal{N}_{\hat{p}}$ is a certain vector subspace of R^n_x). The following properties are equivalent :

$$1 - \sum_{\hat{p}} \cap \mathcal{N}_{\hat{p}} = \{0\}$$

2 - The above decomposition (1) of T(p) can always be performed in such a way that, at $\hat{p}$, $\mathcal{M}$ be transverse to all cones $\mathcal{C}_\beta$; this entails that T(p) admits a restriction to $\mathcal{M}$ in a neighbourhood of $\hat{p}$ (this restriction having a C^∞-dependence with respect to the variables which are transverse to $\mathcal{M}$).

A general sufficient condition for the product of two distributions T_1, T_2 to make sense is given by :

Proposition A.4 : $T_1 . T_2$ is well defined in a neighbourhood of $\hat{p}$ if $\sum_{\hat{p}}(T_1) \cap (- \sum_{\hat{p}}(T_2)) = \emptyset$.

This amounts to say that under this condition there always exist decompositions of the type (1) : $T_1 = \sum_{\beta_1} T_{\beta_1}$, $T_2 = \sum_{\beta_2} T_{\beta_2}$ (2)

such that all couples of corresponding cones $\mathcal{C}_{\beta_1}$, $\mathcal{C}_{\beta_2}$ have non-empty intersections $\left(\mathcal{C}_{\beta_1\beta_2} = \mathcal{C}_{\beta_1} \cap \mathcal{C}_{\beta_2} \neq \emptyset\right)$. Then, one has :

$$T_1 . T_2 = \sum_{\beta} \lim_{\substack{\varepsilon_{\beta_1\beta_2} \to 0 \\ \varepsilon_{\beta_1\beta_2} \in \mathcal{C}_{\beta_1\beta_2}}} F_{\beta_1} . F_{\beta_2}(p + i\varepsilon_{\beta_1\beta_2})$$

and the sum is independent of the decomposition (2).

We also need (in section V) the following result :

Proposition A.5 : if T_1, T_2 are as in proposition A.4, and if moreover :

i) T_1 is represented by a square-integrable function on $\mathcal{U}(\hat{p})$.

ii) T_2 is represented by a bounded function on $\mathcal{U}(\hat{p})$,

then the product of distributions $T_1.T_2$ is represented by the usual product of the corresponding functions, which is itself square-integrable on $\mathcal{U}(\hat{p})$.

This study of products of distributions is treated in the second paper under reference [28].

APPENDIX B.

Local analytic structure of the g.r.d.'s $F^{amp}_{K\updownarrow\mathcal{S}}$ in the neighbourhood of the mass-shell manifold $\mathcal{M}_K$.

Since this appendix is used both in the case of the physical (n + k)-point function $H^{(n+k)}$ ($k = |K|$, $n = |N|$) and in the case of the one-p.i. function $F^{K,N}$ we shall work with a general (n+k)-point function F(p), where $p = \{p_m \; ; \; m \in K \cup N; \sum_m p_m = 0\}$, and put : $F^{amp}(p) = \prod_{j\in K} (p_j^2 - m^2)\, F(p)$.

The boundary values of F^{amp} in which we are interested are the $F^{amp}_{K\updownarrow\mathcal{S}}$, $\mathcal{S}$ being an arbitrary cell in S(N).

B-1. Support in x-space of $F_{K\updownarrow\mathcal{S}}$:

The Fourier transform of $F_{K\updownarrow\mathcal{S}}(p)$ ($p \in R^{4(n+k-1)}_{(p)}$) is actually a distribution $F_{K\updownarrow\mathcal{S}}(x)$ of the variables $\underline{x} = \{\underline{x}_m = x_m - x_{m_o} \; ; \; m \in K \cup N\setminus\{m_o\}\}$ $\left(\underline{x} \in R^{4(n+k-1)}_{(\underline{x})} \cong R^{4(n+k)}_{x}/R^{4}\right)$ and - as it was proved in [20]- $F_{K\updownarrow\mathcal{S}}(x)$ has the same support* $\Gamma_{K\updownarrow\mathcal{S}}$ as the physical n-point function $H_{K\updownarrow\mathcal{S}}(x)$; but $H_{K\updownarrow\mathcal{S}}(x) = r_{K\updownarrow\mathcal{S}}(x) = \langle \Omega, R_{K\updownarrow\mathcal{S}}(x)\Omega \rangle$, and it is more convenient to describe $\Gamma_{K\updownarrow\mathcal{S}}$ through its canonical inverse image in x-space $R^{4(n+k)}_{(x)}$

Now let us recall that the support $\Gamma_{\mathcal{S}}$ of every g.r.p. $R_{\mathcal{S}}$ ($\mathcal{S} \in S(N)$) is a finite union of closed convex cones Γ_t which are all defined by n independent conditions of the type $x_i - x_j \in \bar{V}^+$ ($i,j \in N$) [19]. It turns out that any such set of n conditions is conveniently represented by a tree-graph t whose n vertices are the points x_i ($i \in N$) and whose branches $[x_i - x_j]$ are time-like vectors with end-points x_i, x_j associated with the conditions $x_i - x_j \in \bar{V}^+$ mentioned above. Here it is irrelevant to describe in detail the set $\{t\}_{\mathcal{S}}$ of trees t which are associated with a given cell $\mathcal{S}$, but we need to know the following fact.

Proposition B.1 : for every $\mathcal{S}$ in S(N), one has :

$$\Gamma_{\{\ell\}\uparrow\mathcal{S}} \subset \bigcup_{i\in N} \left\{\{x_r \; ; \; r \in N\} \in \Gamma_{\mathcal{S}} \; ; \; x_\ell - x_i \in \bar{V}^+\right\}$$

$$\Gamma_{\{\ell\}\downarrow\mathcal{S}} \subset \bigcup_{i\in N} \left\{\{x_r \; ; \; r \in N\} \in \Gamma_{\mathcal{S}} \; ; \; x_\ell - x_i \in \bar{V}^-\right\}$$

---

* more precisely : $\Gamma_{K\updownarrow\mathcal{S}}$ is a set which contains the actual (unknown) support of $F_{K\updownarrow\mathcal{S}}$; this is a loose but convenient way of speaking.

Let us now recall that $K\uparrow\mathcal{S} = \{\ell_1\} \uparrow \left(\ldots(\{\ell_k\}\uparrow\mathcal{S})\ldots\right)$ ($\ell_1, \ldots, \ell_k$ being the elements of K) ; thus by recursion over the number of elements of K , it is a corollary of proposition B.1 that $\Gamma_{K\uparrow\mathcal{S}}$ is a union of convex cones Γ_b associated with tree-graphs b (with n+k vertices) of the type described above.

Now every tree b is a "bush" over a certain tree t associated with $\mathcal{S}$; we say that a tree b is a "bush over t" if it enjoys the following properties with respect to t :

i) for every $j \in K$, there exists an element $m(j)$ in $K \cup N\setminus\{j\}$, and a branch $[j, m(j)]$ with end points x_j, $x_{m(j)}$.

ii) all branches of this type are either time-like vectors, or zero vectors (case of coinciding points, or "clusters").

- In a bush b, a vertex x_j is called "maximal" (resp. "minimal") if no branch of b links x_j with any other vertex x_m in the strict future (resp. past) of x_j. The closed cone Γ_b which is associated with such a bush b over t is defined by :

$$\Gamma_b = \{x \; ; \; x_j - x_{m(j)} \in \bar{V}^{b(j)} \; ; \; j \in K \; ; \; \{x_r \; ; \; r \in N\} \in \Gamma_t \}$$

$b(j)$ is a sign function associated with the bush b, and which can take the values $+, -, 0$; $\bar{V}^0 = \{0\}$.

We then have :

Proposition B.2 : $\Gamma_{K\uparrow\mathcal{S}} \subset \bigcup_{b\in B^+} \Gamma_b$, where B^+ is the set of all bushes b over all trees t in $\{t\}_{\mathcal{S}}$ such that : $b(j) = +$, $\forall\, j \in K$.

Similarly one obtains the supports of the g.r.d.'s $r_{\{\ell\}\downarrow(K\setminus\{\ell\})\uparrow\mathcal{S}}$:

Proposition B.3 :

$\forall\, \ell \in K$: $\Gamma_{\{\ell\}\downarrow(K\setminus\{\ell\})\uparrow\mathcal{S}} \subset \bigcup_{b\in B_\ell} \Gamma_b$, where B_ℓ is the set of all bushes b over all trees t in $\{t\}_{\mathcal{S}}$ such that : $b(\ell) = -$, and $b(j) = +$, $\forall\, j \neq \ell$, $j \in K$.

B-2. A majorization of $\sum_{\hat{p}} \left(F^{amp}_{K\uparrow\mathcal{S}}\right)$ in the neighbourhood of the mass-shell manifold of K.

Let us put $\mathcal{M}_K = \{p\ ;\ \sum_{m\in K\cup N} p_m = 0\ ;\ p_j \in H_m, \forall\, j \in K\}$ and choose $\hat{p} \in \mathcal{M}_K$.

For every cell $\mathcal{S}$ in S(N), we have, in view of the spectral conditions (see sections II.2 and IV.1) :

$$\forall\, \ell \in K : \quad F^{amp}_{\{\ell\}\downarrow (K\setminus\{\ell\})\uparrow\mathcal{S}} = F^{amp}_{K\uparrow\mathcal{S}},$$

in a neighbourhood of $\hat{p}$.

Therefore, propositions A.2 and A.1 yield :

$$\sum_{\hat{p}} \left(F^{amp.}_{K\uparrow\mathcal{S}}\right) \subset \Gamma_{K\uparrow\mathcal{S}} \cap \left(\bigcap_{\ell} \Gamma_{\{\ell\}\downarrow (K\setminus\{\ell\})\uparrow\mathcal{S}}\right)$$

But in view of propositions B.2 and B.3, we deduce :

$$\sum_{\hat{p}} \left(F^{amp}_{K\uparrow\mathcal{S}}\right) \quad \left[\bigcap_{\ell\in K}\left(b_\ell \cup_{\ell\in B_\ell} \Gamma_{b_\ell}\right)\right] \cap \left(\bigcup_{b\in B^+} \Gamma_b\right) \qquad (1)$$

Now in any convex component $\Gamma_{b_{\ell_1}} \cap \ldots \cap \Gamma_{b_{\ell_\nu}} \cap \Gamma_b$ of the cone at the right-hand side of (1), we can see that all points x_j ($j \in K$) which are maximal (namely simultaneously maximal in b, $b_{\ell_1}, \ldots, b_{\ell_\nu}$) must certainly form clusters with other points (at least one) either in K or in N ; this is because such a maximal point x_ℓ must satisfy together with the other x_m's the conditions which express that $\{x_m\} \in \Gamma_{b_\ell}$, and one of this condition is $x_\ell - x_{m(\ell)} \in \bar{V}^-$, which implies $x_\ell = x_{m(\ell)}$ (for a certain $m(\ell) \neq \ell$).

Let us now call a "budded bush" β any bush for which $\beta(j)$ = either + or 0, and whose all maximal points x_ℓ with $\ell \in K$ are clusters, and let Γ_β be the corresponding cone. Then from the above analysis of the right hand-side of (1) we obtain :

Proposition B.4 :

$$\sum_{\hat{p}} \left(F^{amp}_{K\uparrow\mathcal{S}}\right) \subset \bigcup_{\beta\in B_o} \Gamma_\beta$$

where B_o is the set of all budded bushes over all trees t in $\{t\}_{\mathcal{S}}$.

B.5. Restriction of $F^{amp}_{K\uparrow\mathcal{S}}$ to $\mathcal{M}_K$ in the neighbourhood of a "non-overlapping" configuration $\hat{p}$.

We shall apply the result of proposition A.3 to the study of the restriction of $F^{amp}_{K\uparrow\mathcal{S}}(p)$ to the manifold $\mathcal{M}_K$ in the neighbourhood of a point $\hat{p}$ such that $\{\hat{p}_j \; ; \; j \in K\} \in \Omega'$. The normal manifold* $\mathcal{N}_p$ to $\mathcal{M}_K$ at $\hat{p}$ is described conveniently in x-space as follows :

$$\mathcal{N}_{\hat{p}} = \{\underline{x}_m = x_m - X, \; m \in K \cup N \; ; \; X = \frac{\sum_m x_m}{(n+k)} \; ; \; \underline{x}_j = \lambda_j \hat{p}_j, \; \forall \; j \in K \; ; \; \lambda_j \in \mathbb{R} \; ; \; \underline{x}_i = 0, \; i \in N\}$$

Then it is easy to check that all the intersections of $\mathcal{N}_p$ with the cones Γ_β of proposition B.4 are reduced to $\{0\}$.

In fact, since $\{\hat{p}_j, \; j \in K\} \in \Omega'$, all the trajectories $\underline{x}_j = \lambda_j \hat{p}_j$ are distinct ; now if $x \in \Gamma_\beta \cap \mathcal{N}_{\hat{p}}$, it must satisfy $\underline{x}_j \in \bar{V}^+$, $\forall \; j \in K$ (since $\beta \in B^+$) ; but if such a point $\{\underline{x}\}$ were $\neq 0$, then one four-vector $\underline{x}_j$ at least would be maximal and single, which would contradict the fact that $x \in \Gamma_\beta$ (β being a budded bush). So we have proved :

Proposition B.5 : at every point $\hat{p}$ such that $\{\hat{p}_j \; ; \; j \in K\} \in \Omega'$ we have : $\sum_p \left(F^{amp}_{K\uparrow\mathcal{S}}\right) \cap \mathcal{N}_{\hat{p}} = \{0\}$; equivalently the mass shell restriction $\hat{F}_{K\uparrow\mathcal{S}}$ of $F^{amp}_{K\uparrow\mathcal{S}}$ is well-defined on the open set $\{p \in \mathcal{M}_K \; ; \; \{p_j \; ; \; j \in K\} \in \Omega'\}$.
A similar result holds for $\sum_{\hat{p}} \left(r^{amp}_{K\downarrow\mathcal{S}}\right)$.

Special case : $N = \{\lambda\}$ $(n = 1)$.

In this case $F_{K\uparrow\lambda}(x)$ is an ordinary retarded function, and $\Gamma_{K\uparrow\lambda} = \{x ; \underline{x}_j \in V^+ ; \forall \; j \in K\}$ In p-space, $\Gamma_{K\uparrow\lambda} = \{p_j \; ; \; p_j \in V^+\}$ is contained in the open dual cone $\tilde{\Gamma}_\beta$ of Γ_β, for all β's. In fact an arbitrary $\tilde{\Gamma}_\beta$ is defined by a set of conditions $\{p \; ; \; p_{J_1} \in V^+ \; , \ldots \; p_{J_\nu} \in V^+ \; ; \; |J_1| \rangle 1, \ldots |J_\nu| \rangle 1, \; (J_1 \ldots J_\nu) =$ partition of $K\}$ (where $J_1, \ldots, J_\nu$ correspond to the clusters of the budded bush β); We then note that $\forall \; \beta$, $\Gamma_\beta \subset \mathcal{C}^+_K = \{p \; ; \; p_K \in V^+\}$.

We thus have :

Proposition B.6 : in the neighbourhood of every point $\hat{p}$ in Ω', the retarded distribution $F_{K\uparrow\lambda}(\{p_j\} \; ; \; j \in K)$ can be decomposed as a sum of boundary values of functions F_β, which are analytic in local tubes T_β with the following properties :

---

* with respect to the Minkowski metric, by convenience.

i) each T_β has a non-empty intersection $\hat{T}_\beta$ with the complexified manifold $(H_m)^k$ ($\hat{T}_\beta$ being a local tube in $(H_m)^k_c$).

ii) $\bigcap_\beta T_\beta$ contains the intersection of the retarded tube $\mathcal{T}_{K\uparrow\lambda}$ (with imaginary basis $\Gamma_{K\uparrow\lambda}$) with a suitable complex neighbourhood of $\hat{p}$.

iii) each T_β is contained in the tube $\mathcal{T}^+_K$, with imaginary basis $\mathcal{C}^+_K$.

The same results are valid for the advanced distribution $F_{K\downarrow\lambda}$, and in both cases ($K\uparrow$ and $K\downarrow$), the point $\hat{p}$ can also be chosen in the subset $(-\Omega')$ of $(H_m^-)^k$.

REFERENCES.

[1] - M. LASSALLE ; Commun. Math. Phys. 36, 185 (1974).

[2] - J. BROS ; Analytic methods in mathematical physics, New York : Gordon and Breach, 1970.

[3] - K. SYMANZIK ; J. Math. Phys. 1, 249 (1960) and in Symposium on theoretical physics Vol. 3, New York, Plenum Press 1967.

[4] - W. ZIMMERMANN ; Nuovo Cimento, 13, 503 (1959) ; 16, 690 (1960).

[5] - H. LEHMANN, K. SYMANZIK, W. ZIMMERMANN ; Nuovo Cimento 1, 205 (1955) ; 6, 319 (1957).

[6] - K. HEPP ; Commun. Math. Phys. 1, 95 (1965).

[7] - O. STEINMANN ; Commun. Math. Phys. 10, 245 (1968).

[8] - V. GLASER, H. LEHMANN, W. ZIMMERMANN ; Nuovo Cimento 6, 1122 (1957).

[9] - A.H. VÖLKEL ; Commun. Math. Phys. 2, 176 (1966).

[10] - R.F. STREATER, A.S. WIGHTMAN ; PCT, spin-statisties and all that. New York: Benjamin 1964.

[11] - R. JOST ; the general theory of quantized fields. Am. Math. Soc. Providence 1965.

[12] - L. CASTILLEJO, R. DALITZ, F.J. DYSON ; Phys. Rev. 101, 453 (1966).

[13] - R. HAAG ; Phys. Rev. 112, 669 (1958).

[14] - D. RUELLE ; Helv. Phys. Acta 35, 147 (1962).

[15] - A. MARTIN ; in Problems of Theoretical Physics, (page 113), Moscow Bauka 1969.

[16] - J. BROS, H. EPSTEIN, V. GLASER, R. STORA : to appear.

[17] - H. EPSTEIN, V. GLASER, R. STORA : Cern preprint TH. 1719 (1973).

[18] - O. STEINMANN ; Helv. Phys. Acta 33, 257, 347 (1960).

[19] - J. BROS ; Thesis (Paris, 1970).

[20] - M. LASSALLE ; Thesis (Orsay, to appear).

[21] - D. RUELLE ; Nuovo Cimento 19, 356 (1961).
H. ARAKI ; J. Math. Phys. 2 163 (1961).

[22] - K. POHLMEYER ; Report Desy 66/36 (unpublished), Hamburg (1966).

[23] - J. BROS, M. LASSALLE ; III Two-particle irreducibility properties (to appear).

[24] - E.C. TITCHMARSH ; Theory of Fourier Integrals, p. 145 ; Oxford : Clarendon Press 1959.

[25] - R. COURANT, D. HILBERT ; Methods of Mathematical Physics, Vol. II, p. 248, New York : Interscience Publ. 1962.

[26] - J. BROS, H. EPSTEIN, V. GLASER ; Helv. Phys. Acta 45, 149 (1972) ; see also J. BROS, D. IAGOLNITZER ; Prooceedings of the International Moscow 1972 Conference on Quantum Field Theory and Quantum Statistics.

[27] - L. SCHWARTZ ; Theorie des Distributions, Paris ; Hermann 1959.

[28] - J. BROS, D. IAGOLNITZER ; Ann. Inst. Henri Poincaré vol. XVIII n° 2, 1973, p. 147-184, and "Essential supports and local analytic structure of distributions" (to appear).

[29] - D.N. WILLIAMS ; Lectures in Theoretical Physics ; Vol. 10.B 357 (1967).

APPENDICE C

Cet appendice est consacré à la preuve de la conséquence suivante du postulat de continuité de la mesure spectrale :

Proposition C.1

Soit s_+ et s_- deux cellules adjacentes séparées par la partition $(I,N\backslash I)$ et (s_1,s_2) le couple de cellules induites d'ordre inférieur. Dans la face $q_I = q_{N\backslash I} = 0$, choisissons la représentation barycentrique $(p_I,\hat{k}_1,\hat{k}_2)$ avec $\hat{k}_{1,2} \in \mathcal{T}_{s_{1,2}}$. Alors à l'intérieur du tube aplati

$$\mathcal{T}_{s_1 s_2} = \{(p_I,\hat{k}_1,\hat{k}_2) \in \mathbb{C}^{4(n-2)} : p_I \in \Lambda,\ \hat{k}_{1,2} \in \mathcal{T}_{s_{1,2}}\}$$

où Λ désigne le continu $\overline{V}^+_{2m}$ (resp. le continu "non-C.D.D."

$$\Lambda = \{p \in \overline{V}^+_{2m} : H^{(2)}(p) \neq 0\}\ )$$

les valeurs au bord $H^{(n)}_{s\ \pm}(p_I,\hat{k}_1,\hat{k}_2)$ (resp. $F^{I,N\backslash I}_{s\ \pm}(p_I,\hat{k}_1,\hat{k}_2)$) sont analytiques en $(\hat{k}_1,\hat{k}_2)$♦ et Hölder-continues en p_I.

La preuve utilise un résultat mathématique simple que nous décrivons maintenant.

Lemme

Soit F(a,x) une distribution de deux variables réelles satisfaisant les propriétés suivantes :
i) son action sur toute fonction-test $\varphi \in s_a$ est valeur au bord d'une fonction analytique $F_\varphi(z)$ analytique dans le demi-plan supérieur $y > 0$.

♦ Sauf sur les faces associées aux partitions transverses à $(I,N\backslash I)$.

ii) son action sur toute fonction-test $\psi \in \mathcal{S}_x$

$$F_\psi(a) = \int F(a,x)\ \psi(x)\ dx$$

est une fonction Hölder-continue de la variable a, au sens suivant :

$$|F_\psi(a) - F_\psi(a')| \leq C\ \|\psi\|_{p,q}\ |a-a'|^\alpha$$

où $\|\psi\|_{p,q}$ désigne la norme (p,q entiers positifs)

$$\|\psi\|_{p,q} = \sup_{\substack{x \\ r\leq p}} (1+|x|^q)\ |D^r\psi(x)|$$

Alors F(a,z) est une fonction Hölder-continue de a, analytique en z dans le demi-plan supérieur.

Preuve :

La condition ii) implique que la distribution tempérée F(a,x) peut être étendue à l'espace obtenu en complétant $\mathcal{S}_x$ pour la norme $\|\ \|_{p,q}$ et que cette extension préserve la Hölder-continuité dans la variable a.

Le noyau de Cauchy

$$\psi_z = \frac{1}{z-x}\quad\frac{1}{(x+i)^{q-1}}$$

appartient au complété de $\mathcal{S}_x$ pour la norme $\|\ \|_{p,q}$ et si l'on écrit

$$F(a,z) = \frac{(z+i)^{q-1}}{2i\pi}\int \frac{F(a,x')}{z-x'}\quad\frac{dx'}{(x'+i)^{q-1}} = \frac{(z+i)^{q-1}}{2i\pi}\ F_{\psi_z}(a)$$

il suffit de vérifier i) pour conclure. La preuve se généraliserait facilement au cas de plusieurs variables complexes.

Sur cette base la Proposition C.1 est une conséquence immédiate i) des résultats du programme linéaire : $H^{(n)}_{\mathcal{S}^{\pm}}(p_I,\hat{k}_1,\hat{k}_2)$ (resp. $F^{I,N\setminus I}_{\mathcal{S}^{\pm}}(p_I,\hat{k}_1,\hat{k}_2$

est une distribution en p_I à valeurs analytiques dans le tube aplati considé

ii) des Propositions 3 et 7 :

$$\int H^{(n)}_{\substack{s \\ \pm}}(p_I,\hat{p}_1,\hat{p}_2)\ \varphi_1(\hat{p}_1)\ \varphi_2(\hat{p}_2)\ d\hat{p}_1 d\hat{p}_2 \quad \text{(resp. } \int F^{I,N\setminus I}_{\substack{s \\ \pm}}(p_I,\hat{p}_1,\hat{p}_2)\varphi_1(\hat{p}_1)\ \varphi_2(\hat{p}_2\ d\hat{p}_1 d\hat{p}_2\ )$$

est une fonction Hölder-continue en p_I au sens du lemme pourvu que l'on choi sisse la formulation détaillée suivante du postulat de continuité de la mesure spectrale. :

Soit $\psi_j = R_{s_j}(\varphi_j)\ |\ \Omega>$, $j=1,2$, $\varphi_j \in s^{(n_j)}(\overline{V^+_{2m}})$, deux états de l'espace de Hilbert définis comme en III.4. Alors on a :

$$|<\psi_1, dE(p)\ \psi_2> - <\psi_1, dE(p')\ \psi_2>| \leq C\, \|\varphi_1\|_{p_1,q_1}\, \|\varphi_2\|_{p_2,q_2}\, |p-p'|^{\alpha}$$

Q U A T R I E M E P A R T I E

STRUCTURE A DEUX PARTICULES DES FONCTIONS DE n POINTS

Résumé :

Dans le cadre de la théorie de L.S.Z. d'un champ scalaire la partie irréductible d'ordre deux de la fonction de n points (dans un canal donné quelconque et pour n arbitraire) est définie comme la solution d'une équation intégrale extraite du cadre perturbatif. Cette solution satisfait la structure analytique et algébrique primitive des fonctions de n points générales (à l'exception de certaines singularités polaires du type C.D.D. généralisé). Finalement on montre que les propriétés d'analyticité supplémentaires des fonctions irréductibles ainsi définies sont équivalentes avec les relations de Glaser, Lehmann et Zimmermann exprimant la complétude des états asymptotiques à deux particules.

I. INTRODUCTION.

La seconde étape du programme non linéaire consiste à extraire dans un canal donné les singularités à deux particules des fonctions de n points d'un champ scalaire(créant un seul type de particules de masse m). En d'autres termes ♦, à définir pour toute partition $(I,N\setminus I)$ de l'ensemble d'indices $N = \{1,2,\ldots,n\}$, n arbitraire, une fonction $G^{I,N\setminus I}$ dite "irréductible d'ordre deux" qui satisfasse les propriétés suivantes :

i) $G^{I,N\setminus I}$ est une fonction de n points générale, c'est-à-dire satisfait la structure analytique et algébrique (linéaire) primitive des fonctions de n points.

ii) sa région de coïncidence dans le canal $(I,N\setminus I)$ a la forme :

$$\mathcal{R}_I^{(2)} = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : p_I^2 < 9m^2\}$$

Pour ces fonctions irréductibles la théorie des perturbations dispose d'une définition topologique au sens des séries formelles de graphes. Considérons le développement d'une fonction de Green de n points en graphes de Feynmann et une partition quelconque $(I,N\setminus I)$ des lignes externes. La partie irréductible d'ordre deux de cette fonction dans ce canal est définie comme la somme formelle de tous les graphes connexes possédant la propriété topologique suivante : il faut couper au moins trois lignes internes pour les séparer en deux sous-graphes connexes disjoints dans le canal considéré.

Les parties irréductibles d'ordre deux ainsi définies satisfont alors au sens des séries formelles de graphes certaines relations intégrales du type Bethe-Salpeter habituellement représentées sous la forme graphique suivante :

♦ Les notations sont celles de la Troisième Partie.

qui s'écrit encore

$$\tilde{t}_c^{(1)}\left(\{p_i, i\in I\};\{p_j, j\in N\backslash I\}\right) = \tilde{t}_c^{(2)}\left(\{p_i, i\in I\};\{p_j, j\in N\backslash I\}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\int \tilde{t}_c^{(1)}\left(\{p_i, i\in I\}; p_\alpha, p_\beta\right)\tilde{t}_c^{(2)}\left(-p_\alpha,-p_\beta;\{p_j, j\in N\backslash I\}\right)$$

$$G^{-1}(p_\alpha)\,G^{-1}(p_\beta)\;\delta(p_\alpha+p_\beta+p_I)\,dp_\alpha\,dp_\beta$$

où $\tilde{t}_c^{(p)}\left(\{p_i, i\in I\};\{p_j, j\in J\}\right)$ représente la partie irréductible d'ordre p (=1,2) du produit chronologique $\tilde{t}_c$ dans le canal (I,J) et G(p) la fonction à deux points complète (avec la prescription de Feynmann).

Cependant l'étude des produits de convolution menée à bien précédemment [1] permet de donner aux relations intégrales de ce type un sens précis dans le domaine analytique primitif des fonctions de n points générales. Prenant comme dans la Troisième Partie la théorie parturbative comme un guide heuristique, nous choisirons l'ensemble des relations ainsi obtenues pour définir les fonctions $G^{I,N\backslash I}$ et établirons qu'elles fournissent une base suffisante pour une introduction rigoureuse de celles-ci dans le formalisme analytique et algébrique de Steinmann-Ruelle-Araki.

L'idée en fut proposée dès 1960 par Symanzik [2] et reçut une première réalisation en 1967 par Bros dans le cas particulier de la fonction de quatre points d'un champ pseudo-scalaire [3]. La construction présentée ici peut être considérée comme une extension de ce résultat au cas général des fonctions de n points (n arbitraire) d'un champ scalaire.

Une étude détaillée de la structure <u>analytique</u> des parties absorptives d'une classe particulière de produits de convolution permet ici en effet une présentation très simple de l'algorithme <u>algébrique</u> général d'irréductibilité.

Comme en [3] cependant certaines hypothèses techniques demeurent nécessaires. En premier lieu le postulat concernant la "continuité de la mesure spectrale" déjà introduit dans l'étude des fonctions irréductibles d'ordre un [4] doit être maintenu pour éviter certaines pathologies locales des valeurs au bord. La présence éventuelle sur les réels de singularités

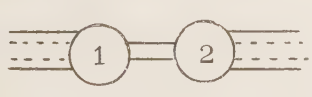
induites par les zéros de la fonction de deux points (type C.D.D. [5]) ou par ceux d'un déterminant de Fredholm à deux points (type C.D.D. généralisé) pose également problème. Ces difficultés seront examinées dans une publication ultérieure [6] et nous ne les discuterons pas ici.

Nous adoptons le point de vue de la théorie de L.S.Z d'un champ scalaire neutre et pour simplifier, le cas d'une seule masse m. Dans la Section II, nous étudions les parties absorptives de certains produits de convolution : la formule de discontinuité qu'on y établit (Théorème 1) est décisive pour la preuve algébrique ultérieure de l'irréductibilité. La Section III reprend et adapte au cas d'un champ scalaire les résultats de [3] concernant le cas d'un canal à deux particules pour la fonction de quatre points : après régularisation à l'infini, la fonction irréductible est introduite comme la solution d'une équation de Fredholm dans le domaine complexe primitif. La Section IV généralise ces résultats au cas d'un canal et d'un nombre n arbitraires. Finalement on montre dans la Section V que l'irréductibilité d'ordre deux dans le canal approprié des fonctions $G^{I,N\setminus I}$ ainsi introduites est <u>équivalente</u> (sauf sur un sous-ensemble exceptionnel correspondant aux singularités C.D.D.) avec les relations de Glaser-Lehmann-Zimmermann exprimant la complétude des états asymptotiques à deux particules [4,7,8].

II. <u>PARTIES ABSORPTIVES DES PRODUITS DE CONVOLUTION</u>.

II.1. <u>Rappels et notations</u>.

Dans cette section, on considère les produits de convolution H^G associés aux graphes G à deux vertex et deux lignes internes, du type

I  $N\setminus I$. H^G est une fonction analytique ainsi définie :

$$H^G(k) = \int_{\mathcal{C}_k} H'(\{k_i, i\in I\}, k_\alpha, k_\beta)\; H''(\{k_j, j\in N\setminus I\}, -k_\alpha, -k_\beta)\,[H^{(2)}(k_\alpha)]^{-1}\,[H^{(2)}(k_\beta)]^{-1}\; dk_\alpha \qquad (1$$

avec $n_1 = |I|$, $n_2 = |N\backslash I|$ et H' (resp. H") une fonction de (n_1+2) (resp. n_2+2) points générale donnée. $\mathcal{C}_k$ est un contour approprié de dimension réelle quatre dans l'espace $\mathbb{C}^4$ de la variable interne k_α. Comme on l'a vu [1] $\mathcal{C}_k$ est obtenu par déformation continue de la "région euclidienne" $\mathbb{R}^3 \times i\,\mathbb{R}$ à l'intérieur du domaine primitif d'analyticité de l'intégrand à partir de la situation où les variables externes k sont elles-mêmes euclidiennes. Dans toute cette section, on supposera la convergence de (1) à l'infini.

Nous savons [1] que H^G est une fonction de n points générale, c'est-à-dire qu'elle est analytique dans la réunion de la famille de tubes $\{\mathcal{T}_{\mathcal{S}}, \mathcal{S} \in S(N)\}$, que ses valeurs au bord $\{H^G_{\mathcal{S}}(p),\ \mathcal{S} \in S(N)\}$ satisfont les relations de Steinmann et les relations de coïncidence :

$$H^G_{\mathcal{S}_+}(p) \quad - \quad H^G_{\mathcal{S}_-}(p) \qquad\qquad p \in \mathcal{R}_I$$

pour tout couple $(\mathcal{S}_+, \mathcal{S}_-)$ séparé par la partition $(I, N\backslash I)$, avec

$$\mathcal{R}_I = \{\, p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} \ :\ p_I^2 \neq m^2\ ,\ p_I^2 < 4m^2 \} \ .$$

On définit alors les "parties absorptives" $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^G$ de H^G dans chaque canal $(I, N\backslash I)$ en écrivant la relation de Ruelle généralisée :

$$[\, H^G_{\mathcal{S}_+} - H^G_{\mathcal{S}_-} \,](p) \ = \ \Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^G(p) - \Delta_{\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1} H^G(p)$$

où $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$) est une cellule de I (resp. $N\backslash I$) et $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^G$ une distribution à support dans l'ensemble

$$\Sigma_I \quad \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} \ :\ p_I \in \overline{V}^+_{2m} \cup H^+_m\} \ .$$

On vérifie facilement que $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^G$ est l'une des valeurs au bord réelles du prolongement analytique commun $\Delta^I H^G$ de toutes les discontinuités $[\, H^G_{\mathcal{S}_+} - H^G_{\mathcal{S}_-} \,](p_I, \hat{k})$ à l'intérieur de la face $q_I = q_{N\backslash I} = 0$. ($\hat{k}$ désigne les $4(n-2)$ variables complexes restantes). Plus précisément $\Delta^I H^G$ est une

distribution en p_I, analytique en $\hat{k} = (\hat{k}_1, \hat{k}_2)$ dans la réunion de tous les tubes aplatis $\{\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1} \times \mathcal{T}_{\mathcal{S}_2} \; ; \; \mathcal{S}_1 \in S(I), \; \mathcal{S}_2 \in S(N\backslash I)\}$ avec des voisinages complexes appropriés de régions réelles les connectant. $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^G(p_I, \hat{k})$ désigne alors la branche de $\Delta^I H^G$ analytique dans $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1} \times \mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}$ et $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^G(p)$ sa valeur au bord réelle dans Σ_I à partir des directions de ce tube. Par la suite, on utilisera indifféremment les notations $\Delta^I H^G$ et ΔH^G si aucune confusion n'est possible.

Rappelons également la propriété géométrique simple suivante : à toute cellule $\mathcal{S} \in S(N)$ on peut associer deux cellules à (n+2) points $\alpha\uparrow \beta\uparrow \mathcal{S}$ et $\alpha\downarrow \beta\downarrow \mathcal{S}$ ainsi définies

$$\{\alpha,\beta\}\uparrow \mathcal{S} = \alpha\uparrow \beta\uparrow \mathcal{S} = \{J \subseteq N \cup \{\alpha,\beta\} : \quad \emptyset \neq J \subset \{\alpha,\beta\} \quad \text{ou} \quad J \cap N \in \mathcal{S}\}$$

$$\{\alpha,\beta\}\downarrow \mathcal{S} = \alpha\downarrow \beta\downarrow \mathcal{S} = \{J \subset N \cup \{\alpha,\beta\} : \quad N \subset J \neq N \cup \{\alpha,\beta\} \quad \text{ou} \quad J \cap N \in \mathcal{S}\}$$

Dans l'espace complexe de ces (n+2) variables on considèrera également la représentation barycentrique $(k_\alpha, k_\beta, \hat{k}_1)$ du tube $\mathcal{T}_{\alpha\uparrow\beta\uparrow\mathcal{S}_1}$ (resp. $\mathcal{T}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathcal{S}_1}$) avec $\hat{k}_1 \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}_1}$, et la couche de masse réelle

$\sigma = (H_m^+)^2 = \{p_\alpha \in H_m^+ \; , \; p_\beta \in H_m^+\}$.

Bien que sa complexifiée σ^c ne soit pas transverse à $\mathcal{T}_{\alpha\uparrow\beta\uparrow\mathcal{S}_1}$ (resp. $\mathcal{T}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathcal{S}_1}$) on a montré en général dans le cadre du programme linéaire ([4], Proposition B.5) que pour toute fonction de (n+2) points $H^{(n+2)}$ la fonction amputée

$$H^{amp}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathcal{S}_1}(p_\alpha, p_\beta, \hat{k}_1) = (p_\alpha^2 - m^2)(p_\beta^2 - m^2)\, H^{(n+2)}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathcal{S}_1}(p_\alpha, p_\beta, \hat{k}_1)$$

(resp. $H^{amp}_{\alpha\uparrow\beta\uparrow\mathcal{S}_1}$) admet au sens des distributions une restriction à σ en tous les points du sous-ensemble ouvert $\hat{\sigma}$ des configurations non parallèles (c'est-à-dire avec $p_\alpha \neq p_\beta$). On note désormais cette restriction

$$\hat{H}^{(n+2)}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathcal{S}_1}(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta, \hat{k}_1) \qquad (\text{resp. } \hat{H}^{(n+2)}_{\alpha\uparrow\beta\uparrow\mathcal{S}_1}(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta, \hat{k}_1)) \; .$$

Remarque :

Dans le cas présent où deux vecteurs seulement sont sur la couche de masse, les fonctions $H^{amp}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathcal{S}_1}$ (resp. $H^{amp}_{\alpha\uparrow\beta\uparrow\mathcal{S}_1}$) sont en fait des distributions en $p_I = k_\alpha + k_\beta$, analytiques en k_α au voisinage de σ. Cette propriété

résulte du fait que dans la face $q_\alpha + q_\beta = 0$ la structure analytique primitive de $H^{(n+2)}$ est celle d'une fonction à deux points dans le quadrivecteur k_α.

Finalement dans toute cette section nous supposerons désormais que les fonctions de n points générales considérées satisfont également l'hypothèse suivante :
Etant données deux cellules adjacentes $\mathcal{s}_+$ et $\mathcal{s}_-$ séparées par la partition $(I,N\backslash I)$, les valeurs au bord $H^{(n)}_{\substack{\mathcal{s}\\ \pm}}(p_I,\hat{k})$ et $\Delta_{\mathcal{s}_1\mathcal{s}_2} H^{(n)}(p_I,\hat{k})$ avec $\hat{k} \in \mathcal{T}_{\mathcal{s}_1} \times \mathcal{T}_{\mathcal{s}_2}$ sont des fonctions continues bornées de la variable p_I dans la région $p_I^2 \geq 4m^2$.

Il résulte alors de cette hypothèse et de la remarque précédente que les restrictions $\hat{H}^{(n+2)}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathcal{s}_1}$ (resp. $\hat{H}^{(n+2)}_{\alpha\uparrow\beta\uparrow\mathcal{s}_1}$) s'identifient à des fonctions continues bornées sur σ.

Dans les applications ultérieures (Section V) les fonctions de n points physiques considérées satisferont ces propriétés qui seront établies sur la base du postulat de "continuité de la mesure spectrale" déjà introduit [4].

II.2. Une formule de discontinuité

Nous pouvons maintenant établir le théorème fondamental suivant :

Théorème 1

Considérons le canal de convolution $(I,N\backslash I)$ de H^G et le tube aplati $\mathcal{T}_{\mathcal{s}_1\mathcal{s}_2}$ suivant à l'intérieur de la face $q_I = q_{N\backslash I} = 0$:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{s}_1\mathcal{s}_2} = \{(p_I,\hat{k}_1,\hat{k}_2) \in \mathbb{C}^{4(n-2)} : p_I \in \Sigma^{(2)} \ , \ \hat{k}_1 \in \mathcal{T}_{\mathcal{s}_1} \ , \ \hat{k}_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{s}_2}\}$$

où $\Sigma^{(2)}$ désigne la région à deux particules :

$$\Sigma^{(2)} = \{p \in \mathbb{R}^4 \; : \; p \in V^+, \quad 4m^2 \leq p^2 < 9m^2\}$$

A l'intérieur de $\mathcal{T}_{s_1 s_2}$ la partie absorptive $\Delta^I H^G$ est donnée par la formule suivante :

$$\Delta_{s_1 s_2} H^G(p_I, \hat{k}_1, \hat{k}_2) = \int_{\mathcal{C}_{s_1}} H'(p_I, \hat{k}_1, k_\alpha) \; \Delta H''(p_I, -k_\alpha, \hat{k}_2) \; [H^{(2)}(k_\alpha)]^{-1} \; [H^{(2)}(p_I + k_\alpha)]^{-1} \; dk_\alpha$$

$$+ \int_{\mathcal{C}_{s_2}} \Delta H'(p_I, \hat{k}_1, k_\alpha) \; H''(p_I, -k_\alpha, \hat{k}_2) \; [H^{(2)}(k_\alpha)]^{-1} \; [H^{(2)}(p_I + k_\alpha)]^{-1} \; dk_\alpha$$

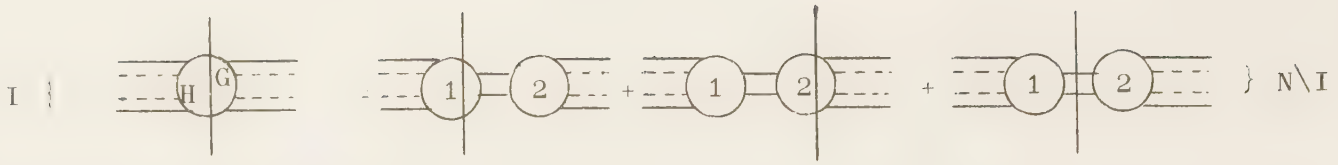
$$+ \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^2 \int \hat{H}'_{\alpha \downarrow \beta \downarrow s_1}(\hat{k}_1, \vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta) \; \hat{H}''_{\underline{\alpha} \downarrow \underline{\beta} \downarrow s_2}(\vec{p}_{\underline{\alpha}}, \vec{p}_{\underline{\beta}}, \hat{k}_2) \; \delta(p_\alpha + p_\beta + p_I) \; \delta^-_\alpha \; \delta^-_\beta \; dp_\alpha \; dp_\beta \qquad (2)$$

où $\mathcal{C}_{s_1}$ (resp. $\mathcal{C}_{s_2}$) est un contour dans l'espace $\mathbb{C}^4$ de la variable k_α décrit ultérieurement, (-Z) le résidu de la fonction de deux points $H^{(2)}$ sur l'hyperboloïde de masse $p^2 = m^2$ et où la notation $\underline{\alpha}$ signifie que $p_{\underline{\alpha}} = -p_\alpha$.

Remarques :

1) L'intégrand de chacun des deux premiers termes du second membre est un produit de distributions en p_I. C'est pour donner un sens à ce produit que l'hypothèse technique de continuité en p_I des valeurs au bord est requise.

2) L'expression (2) de la discontinuité de H^G exhibe la contribution de chaque fonction de vertex (deux premiers termes) et celle de la prescription d'intégration sur les lignes internes. On peut illustrer ces contributions sous la forme graphique suivante :

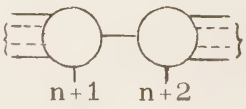


3) La preuve est assez longue. Le lecteur qui n'est pas intéressé par les détails techniques peut éviter la suite de cette section.

II.3. Preuve du théorème.

Considérons un couple de tubes adjacents $(\mathcal{T}_{\mathcal{G}_+}, \mathcal{T}_{\mathcal{G}_-})$ séparés par la face $q_I = q_{N\setminus I} = 0$ et réécrivons l'expression (1) de H^G sous la forme :

$$\forall\, k \in \mathcal{T}_{\mathcal{G}_\pm} \qquad H^G_{\mathcal{G}_\pm}(k) = \int_{\mathcal{C}^\pm(k)} H^T(k, k_{n+1}, k_{n+2}) \,\Big|_{k_{n+1}+k_{n+2}=0}\, [H^{(2)}(k_{n+2})]^{-1}\, dk_{n+1} \qquad (3)$$

Ici H^T est la fonction de (n+2) points associée à l'arbre I 

N\I, $\mathcal{C}^\pm(k) = \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{L}^\pm$ un contour de dimension réelle quatre dans l'espace $\mathbb{C}^4$ de k_{n+1}, et $\mathfrak{L}^\pm$ un contour du plan complexe k^o_{n+1} se faufilant de $-i^\infty$ à $+i^\infty$ entre les singularités de H^T. Celles-ci correspondent aux partitions de vertex de l'arbre T, c'est-à-dire [1] aux canaux $\{n+1\}, \{n+2\}$, $I\cup\{n+1\}, J\cup\{n+1\}$ pour tout $J \in \wp^*(I)$ et $L \cup \{n+2\}$ pour tout $L \in \wp^*(N\setminus I)$. Nous désignons désormais par $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_I, \Gamma_J, \Gamma_L\}$ les ensembles singuliers correspondants et par $\{\hat\Gamma_1, \hat\Gamma_2, \hat\Gamma_I, \hat\Gamma_J, , \hat\Gamma_L\}$ leurs traces dans le plan k^o_{n+1}. En général celles-ci ne sont pas confondues et le contour $\mathfrak{L}^\pm$ n'est pas pincé (Figure 1).

A la limite $q^o_I = 0$, Γ_I est plongé dans l'espace de la variable réelle p_{n+1} et les deux sous-ensembles $\gamma_1 = \{p^2_{n+1} = m^2\}$ et $\gamma_I = \{(p_{n+1}+p_I)^2 = m^2\}$ de (respectivement) Γ_1 et Γ_I ont une intersection qui est une sphère σ. (Dans les sections du plan k^o_{n+1} ceci n'est visible que pour certaines valeurs de $\vec p_{n+1}$). Cependant on verra par la suite que la structure analytique

locale de l'intégrand au voisinage de σ permet alors d'éviter le pincement de $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{L}^{\pm}$ par une déformation convenable.

a. Trois contributions.

Choisissons deux points k_+ (resp. k_-) dans $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_+}$ (resp. $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_-}$) symétriques par rapport à la face commune $q^o_I = q^o_{N\setminus I} = 0$, c'est-à-dire avec $q^o_I = +\varepsilon$ (resp. $-\varepsilon$) et les autres variables communes $(p_I, \hat{k})$ fixées dans $\mathfrak{I}_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}$.

Pour étudier la discontinuité

$$\Delta_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2} H^G(p_I, \hat{k}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[H^G_{\mathcal{G}_+}(k_+) - H^G_{\mathcal{G}_-}(k_-) \right] \qquad (4)$$

il est maintenant nécessaire de relâcher la contrainte $k_{n+1} + k_{n+2} = 0$ dans (3) et d'utiliser l'analyticité de l'intégrand dans tout l'espace ambiant $\mathbb{C}^{4(n+1)}$. Au voisinage de la région réelle $\{p_I \in \Sigma^{(2)}, \ p_{n+1} + p_{n+2} = 0\}$ on voit facilement (Figure 2) qu'il y a quatre déterminations de H^T correspondant au choix des signes $(q^o_I \gtrless 0, \ q^o_{N\setminus I} \gtrless 0)$. Nous désignons par H^T_+ (resp. H^T_-, H^T_o) celle qui correspond au choix $(+,-)$ (resp. $(-,+)$; $(+,+)$).
Comme par la suite seule importera la dépendance des contours par rapport à ces variables nous réécrivons (3) sous la forme :

$$H^G_{\mathcal{G}_{\pm}}(k_{\pm}) = \int_{\mathcal{C}^{\pm}(a_{\pm})} \widetilde{H}^T_{\pm}(k(a_{\pm}), k_{n+1}) \, dk_{n+1} \qquad (5)$$

où $a_{\pm}$ est la projection de $k_{\pm}$ dans l'espace π des variables $\{q^o_I, q^o_{N\setminus I}, q^o_{n+1}+q^o_{n+2}$ et $\widetilde{H}^T_{\pm}(k(a_{\pm}), k_{n+1})$ une notation abrégée pour $H^T_{\pm}(k(a_{\pm}), k_{n+1}, k_{n+2})[H^{(2)}(k_{n+2})]^{-1}$.

Au vu de (5) et des propriétés d'analyticité de H^T, la discontinuité (4) peut alors se réécrire :

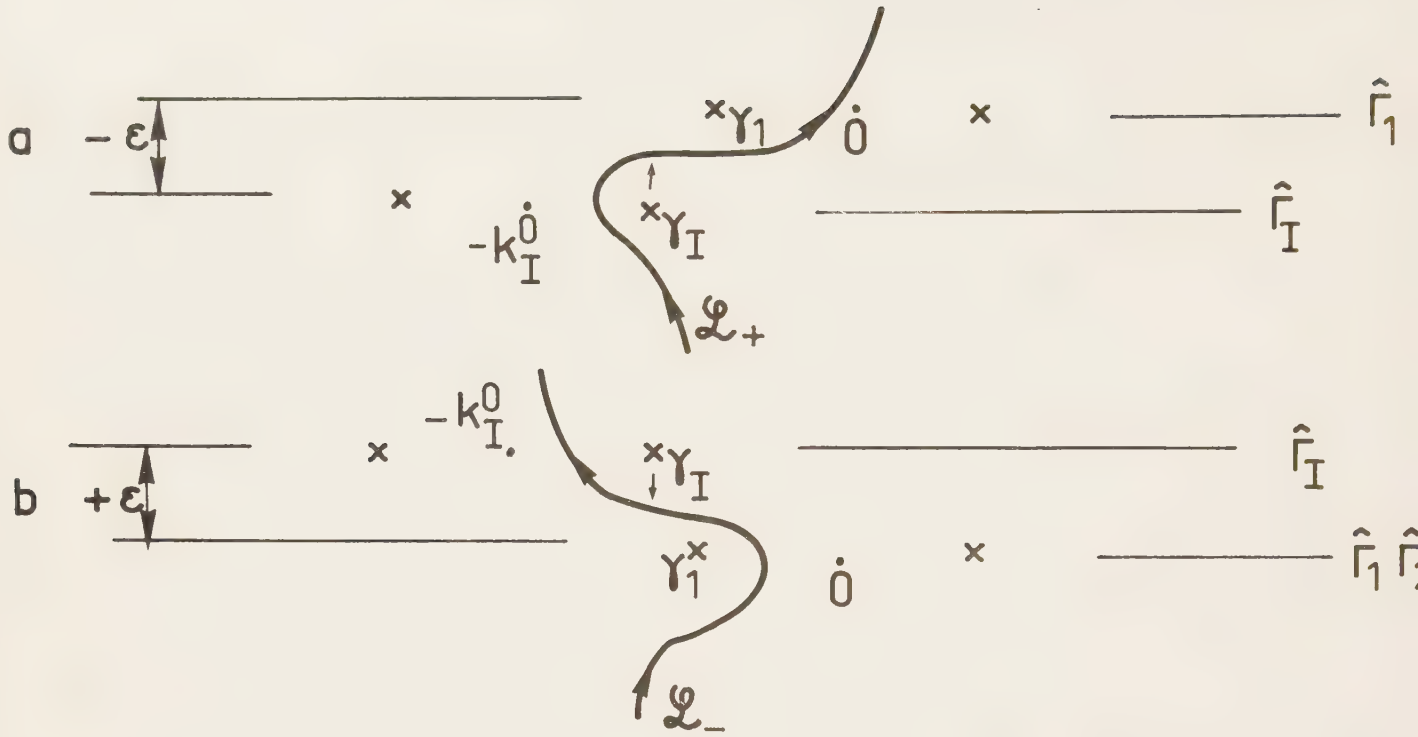

a
$-\varepsilon$
γ_1
$\dot{0}$
$\hat{\Gamma}_1$
$-k_I^0$
γ_I
$\hat{\Gamma}_I$
$\mathcal{L}_+$
b
$+\varepsilon$
$-k_I^0$
γ_I
$\hat{\Gamma}_I$
γ_1
$\dot{0}$
$\hat{\Gamma}_1$
$\mathcal{L}_-$

FIG.1

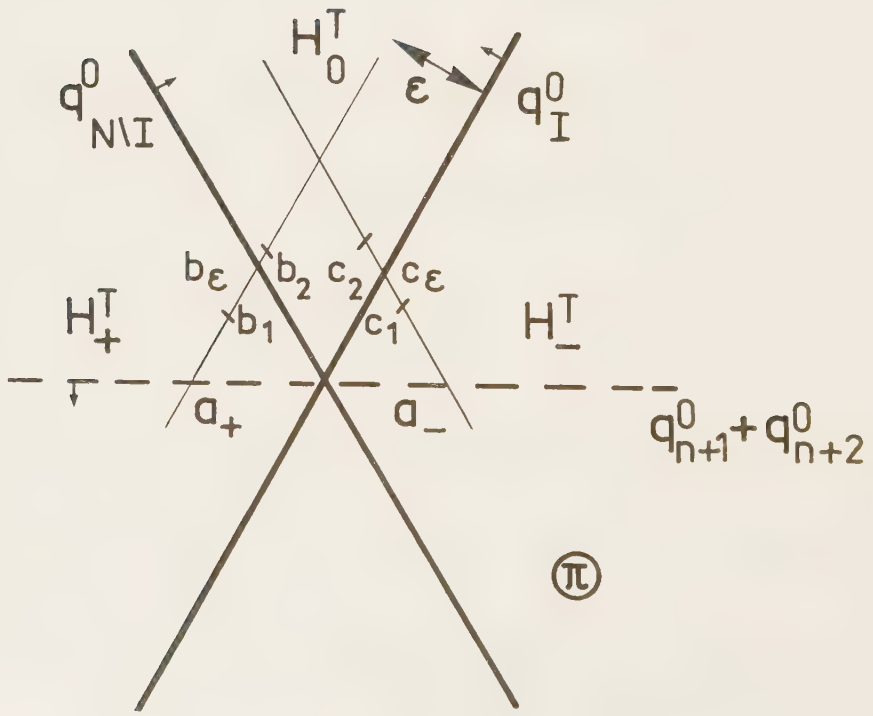

H_0^T
ε
$q_{N\setminus I}^0$
q_I^0
b_ε
b_2
c_2
c_ε
H_+^T
b_1
c_1
H_-^T
a_+
a_-
$q_{n+1}^0 + q_{n+2}^0$
π

FIG.2

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^G = \lim_{\varepsilon\to 0} \Big[\int_{\mathcal{C}^+(b_1)} \widetilde{H}_+^T(k(b_1),k_{n+1})dk_{n+1} - \int_{\mathcal{C}^+(b_2)} \widetilde{H}_o^T(k(b_2),k_{n+1})\, dk_{n+1}$$

$$+ \int_{\mathcal{C}^+(c_2)-\mathcal{C}^-(c_2)} \widetilde{H}_o^T(k(c_2),k_{n+1})dk_{n+1} + \int_{\mathcal{C}^-(c_2)} \widetilde{H}_o^T(k(c_2),k_{n+1})dk_{n+1}$$

$$- \int_{\mathcal{C}^-(c_1)} \widetilde{H}_-^T(k(c_1),k_{n+1})dk_{n+1}\Big]$$

Ici b_1, b_2, c_1, c_2 sont des points de l'espace π représentés sur la Figure 2.

Les contours $\mathcal{C}^+(b_1)$ et $\mathcal{C}^+(b_2)$ (resp. $\mathcal{C}^-(c_1)$ et $\mathcal{C}^-(c_2)$) sont obtenus par déformation continue du contour original $\mathcal{C}^+(a_+)$ (resp. $\mathcal{C}^-(a_-)$) à l'intérieur du domaine d'analyticité de l'intégrand. Les points $k(b_1)$ et $k(b_2)$ (resp. $k(c_1)$ et $k(c_2)$) sont de petites "perturbations" du point $\hat{k}$ dont les projections sur π sont b_1 et b_2 (resp. c_1 et c_2). On a utilisé l'homotopie des cycles $\mathcal{C}^+(b_2)$ et $\mathcal{C}^+(c_2)$ dans le domaine d'analyticité de $\widetilde{H}_o^T$.

En laissant b_1 et b_2 (resp. c_1 et c_2) tendre vers b_ε (resp. c_ε), on obtient finalement :

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} H^G = \lim_{\varepsilon\to 0} \Big[\int_{\mathcal{C}^+(b_\varepsilon)} [\widetilde{H}_+^T - \widetilde{H}_o^T]\,(k(b_\varepsilon),k_{n+1})\, dk_{n+1}$$

$$+ \int_{\mathcal{C}^-(c_\varepsilon)} [\widetilde{H}_o^T - \widetilde{H}_-^T]\,(k(c_\varepsilon),k_{n+1})\, dk_{n+1}$$

$$+ \int_{\mathcal{C}^+(c_\varepsilon)-\mathcal{C}^-(c_\varepsilon)} \widetilde{H}_o^T\,(k(c_\varepsilon),k_{n+1})\, dk_{n+1}\Big] \qquad (6)$$

qui exprime les contributions du pincement des contours (troisième terme) et celles des discontinuités de l'intégrand.

b. Etude des deux premiers termes.

Dans le premier terme du second membre de (6), $\mathcal{C}^+(b_\varepsilon)$ est défini comme la limite pour $b_1 \to b_\varepsilon$ d'un contour $\mathcal{C}^+(b_1) = \mathbb{R}^3 \times \mathcal{L}^+(b_1)$ où

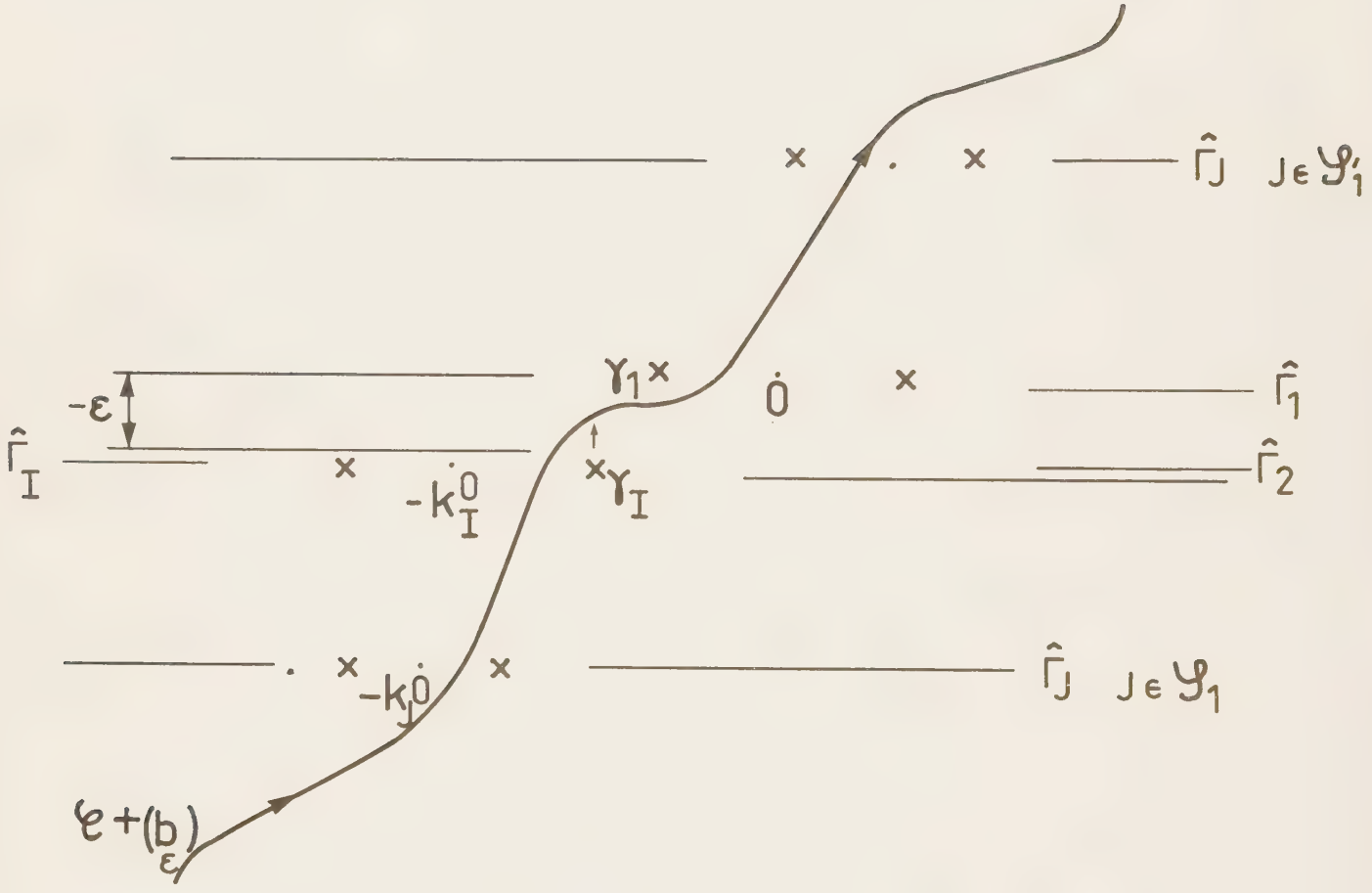

$\hat{\Gamma}_J$ $J \in \mathcal{Y}_1$
γ_1
$-\varepsilon$
$\hat{\Gamma}_1$
$\hat{\Gamma}_I$
$\hat{\Gamma}_2$
$-k_I^0$
γ_I
$-k_j^0$
$\hat{\Gamma}_J$ $J \in \mathcal{Y}_1$
$\varphi + (b)_\varepsilon$

FIG 3

$\mathcal{L}^+(b_1)$ reste homotope à $\mathcal{L}^+(a_+)$ dans le domaine d'analyticité de l'intégrand. La Figure 3 représente la situation à la limite $b_1 = b_\varepsilon$, c'est-à-dire dans la variété $\{q^o_{N\setminus I} = 0,\ p_{n+1} + p_{n+2} = 0\}$: $\hat{\Gamma}_1$ et $\hat{\Gamma}_2$ sont à la distance ε ; $\hat{\Gamma}_I$ et $\hat{\Gamma}_2$ sont confondus mais à cause de la présence du facteur $[H^{(2)}(k_{n+2})]^{-1}$ dans l'intégrand, $\hat{\Gamma}_2$ n'a pas de pôles et $\mathcal{L}^+(b_\varepsilon)$ n'est pas pincé. Les singularités $\{\hat{\Gamma}_L,\ L \in \wp^*(N\setminus I)\}$ ne sont plus présentes : on vérifie facilement qu'elles correspondent toutes à des partitions transverses à la face $q^o_{N\setminus I} = 0$.

Examinons maintenant ce qui se passe quand $\varepsilon \to 0$ à partir d'une valeur donnée ε_o : à la limite $\varepsilon = 0$, $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{L}^+(b_\varepsilon)$ est pincé entre les deux variétés polaires γ_1 et γ_I. Pour $\varepsilon \leq \varepsilon_o$ il est donc nécessaire de modifier la définition de $\mathcal{C}^+(b_\varepsilon)$ de la façon suivante.

Remarquons d'abord qu'il suffit de déformer $\mathcal{C}^+(b_\varepsilon)$ dans sa "partie centrale", la région Ω représentée sur la Figure 4. On utilise ensuite la structure analytique locale d'une fonction de n points au voisinage de σ (voir la remarque à la fin de II.1) : analyticité en k_{n+1} dans $V_{\hat{k}}(\Omega)\setminus(\gamma_1 \cup \gamma_I)$ où $V_{\hat{k}}(\Omega)$ désigne un voisinage complexe de Ω.

Considérons alors le champ de vecteurs suivant défini sur Ω et dépendant continuement de ε pour $\varepsilon_o \geq \varepsilon \geq 0$:

$$q^{(\varepsilon)}_{n+1}(p_{n+1}) = (\vec{q}_{n+1}, q^o_{n+1})^{(\varepsilon)} = [\vec{0}, \varepsilon(1+\mu p^o_{n+1})] + (\varepsilon_o - \varepsilon)\varphi(p_{n+1})\ u^-(p_{n+1}) \qquad (7)$$

où μ est une constante positive, φ une fonction continue ayant pour support $\overline{\Omega}$ et strictement positive dans Ω, et $u^-(p) = \lambda(p + \frac{p_I}{2})$ un champ de vecteurs radial et attractif (λ constante négative).

Pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_o$, ε_o suffisamment petit, on vérifie facilement que sur tout Ω, $p_{n+1} + i q^{(\varepsilon)}_{n+1}$ peut être maintenu dans $V_{\hat{k}}(\Omega)\setminus(\gamma_1 \cup \gamma_I)$. On définit alors $\mathcal{C}^+(b_\varepsilon)$ par le champ $q^{(\varepsilon)}_{n+1}$ pour $p_{n+1} \in \Omega$, et par $k^o_{n+1} \in \mathcal{L}^+(b_\varepsilon)$ autrement. (Ici il faut choisir $\mathcal{L}^+(b_\varepsilon)$ tel que sa restriction à Ω soit la ligne $\varepsilon(1 + \mu p^o_{n+1})$).

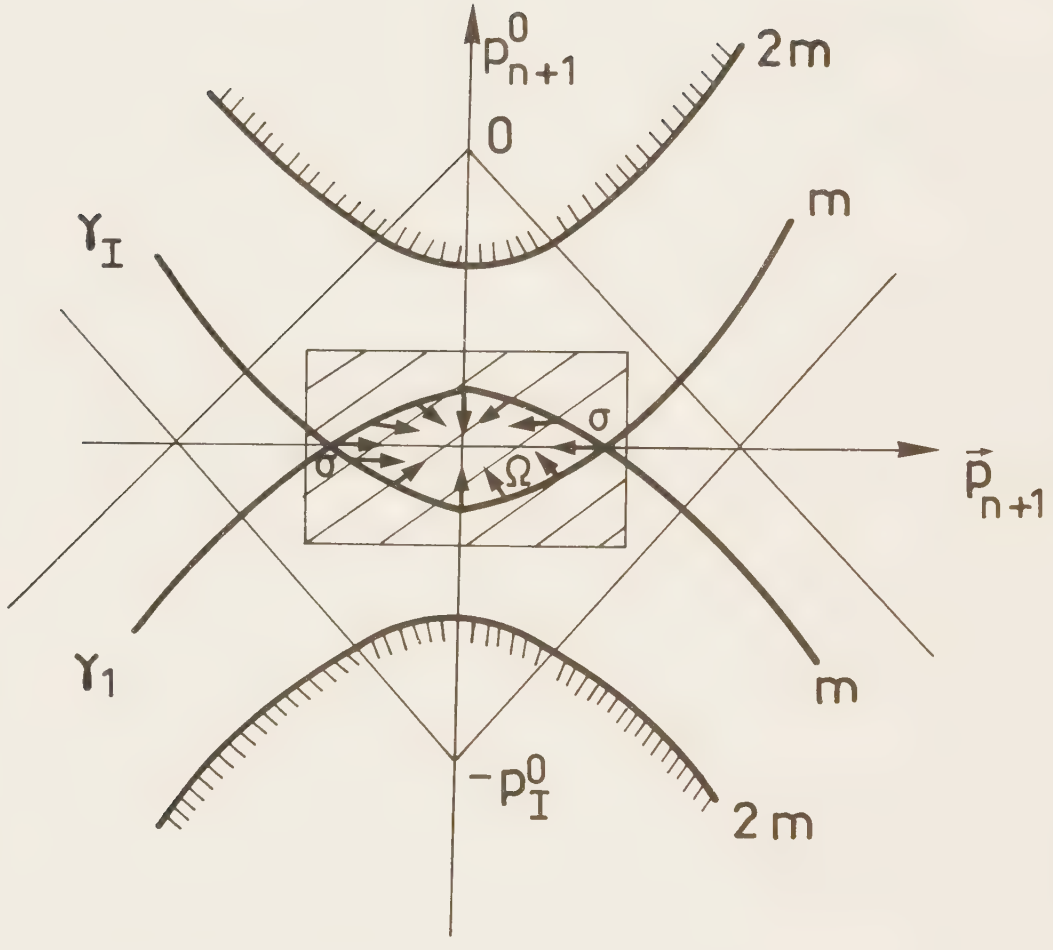


FIG.4

En d'autres termes en tous les points de σ où se produit le pincement entre les variétés γ_1 et γ_I, le contour $\mathcal{C}^+(b_\varepsilon)$ est déformé légèrement dans les directions complexes d'espace $\vec{q}_{n+1}$ et cette distortion est maintenue continûment sur Ω (Figure 4). Cette définition de $\mathcal{C}^+(b_\varepsilon)$ permet d'écrire :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{\mathcal{C}^+(b_\varepsilon)} [\tilde{H}^T_+ - \tilde{H}^T_o]\ (k(b_\varepsilon),k_{n+1})\ dk_{n+1}\right] = \int_{\mathcal{C}^+(0)} [\tilde{H}^T_+ - \tilde{H}^T_o](k(0),k_{n+1})\ dk_{n+1} \tag{8}$$

ou encore en utilisant la structure produit de H^T :

$$\int_{\mathcal{C}_{\hat{s}_1}} H'(p_I,\hat{k}_1,k_\alpha)\ \Delta H''(p_I,-k_\alpha,\hat{k}_2)\ [H^{(2)}(k_\alpha)]^{-1}[H^{(2)}(p_I+k_\alpha)]^{-1}\ dk_\alpha \tag{9}$$

où la notation $\mathcal{C}_{\hat{s}_1}$ rétablit la dépendance de $\mathcal{C}^+(0)$ par rapport aux variables externes du tube $\mathcal{T}_{\hat{s}_1}$. Ici l'hypothèse de continuité en p_I des valeurs au bord est requise pour donner un sens au produit des termes de l'intégrand.

Considérons maintenant le second terme de (6) :

$$\left[\int_{\mathcal{C}^-(c_\varepsilon)} [\tilde{H}^T_o - \tilde{H}^T_-]\ (k(c_\varepsilon),k_{n+1})\ dk_{n+1}\right] \tag{10}$$

L'argument diffère ici légèrement du précédent : en effet $\mathcal{C}^-(c_\varepsilon)$ est défini comme la limite pour $c_1 \to c_\varepsilon$ d'un contour $\mathcal{C}^-(c_1) = \mathbb{R}^3 \times \mathcal{L}^-(c_1)$ où $\mathcal{L}^-(c_1)$ reste homotope à $\mathcal{L}^-(a_-)$ dans le domaine d'analyticité de l'intégrand. Mais comme on le vérifie sur la Figure 5, à la limite $c_1 = c_\varepsilon$ le contour $\mathcal{C}^-(c_1)$ est pincé entre γ_1 et γ_I en tous les points de σ. Partant d'une valeur ε'_o de $\varepsilon' = q^o_I$, $\mathcal{C}^-(c_1)$ doit donc être déformé sur Ω de la façon suivante.

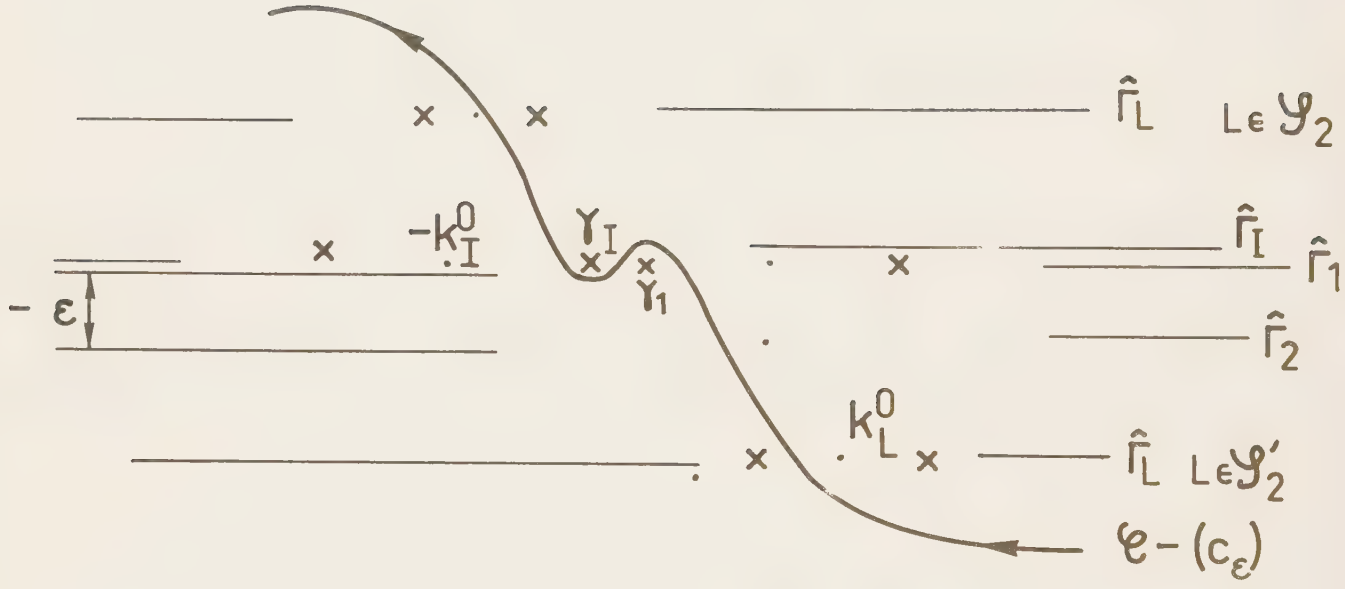

$\hat{\Gamma}_L$ $L\epsilon\mathcal{Y}_2$
$-k_I^0$
γ_I
$\hat{\Gamma}_I$
$\hat{\Gamma}_1$
$-\varepsilon$
γ_1
$\hat{\Gamma}_2$
k_L^0
$\hat{\Gamma}_L$ $L\epsilon\mathcal{Y}_2'$
$\mathcal{C}-(c_\varepsilon)$

FIG. 5

Considérons le champ de vecteurs $q_{n+1}^{(\varepsilon')}$ défini sur Ω et dépendant continûment de ε' pour $\varepsilon'_o \geq \varepsilon' \geq 0$:

$$q_{n+1}^{(\varepsilon')} = [\vec{0}, \varepsilon'(1 - \mu p_{n+1}^o)] + (\varepsilon'_o - \varepsilon')\ \varphi(p_{n+1})\ u^+(p_{n+1})$$

avec $u^+(p) = -u^-(p)$ un champ de vecteurs répulsif. Pour tout $\varepsilon' \leq \varepsilon'_o$, $\mathcal{C}^-(c_1)$ est défini alors par le champ $q_{n+1}^{(\varepsilon')}$ pour $p_{n+1} \in \Omega$ et par $k_{n+1}^o \in \mathcal{L}^-(c_1)$ au dehors (avec la ligne $\varepsilon'(1 - \mu p_{n+1}^o)$ comme restriction de $\mathcal{L}^-(c_1)$ à Ω).

Avec ce choix de $\mathcal{C}^-(c_1)$, (10) a un sens. De plus, pour $\varepsilon = 0$, $\mathcal{C}^-(c_\varepsilon)$ n'est pas pincé et on peut écrire la limite de (10) sous la forme :

$$\int_{\mathcal{C}_{\mathcal{S}_2}} \Delta H'(p_I, \hat{k}_1, k_\alpha)\ \ H''(p_I, -k_\alpha, \hat{k}_2)\ [H^{(2)}(k_\alpha)]^{-1}\ [H^{(2)}(p_I + k_\alpha)]^{-1}\ dk_\alpha$$

où la notation $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_2}$ rétablit la dépendance par rapport aux variables externes du tube $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}$ du contour $\mathcal{C}^-(0)$ (lui-même identique à n'importe quel $\mathcal{C}^-(c_\varepsilon)$ pour ε suffisamment petit). Là encore ce passage à la limite a un sens sur la base de l'hypothèse de continuité en p_I des valeurs au bord.

c. Le double résidu sur la sphère σ.

Considérons maintenant le troisième terme de (6) :

$$\int_{\mathcal{C}^+(c_\varepsilon) - \mathcal{C}^-(c_\varepsilon)} \widetilde{H}_o^T\ (k(c_\varepsilon), k_{n+1})\ dk_{n+1}$$

A la place des contours $\mathcal{C}^\pm(c_\varepsilon)$ il est utile de considérer d'autres représentants $\underline{\mathcal{C}}^\pm(c_\varepsilon)$ dans la même classe d'homologie dans le domaine d'analyticité de l'intégrand. Ce sont ces contours $\underline{\mathcal{C}}^\pm(c_\varepsilon)$ que nous décrivons maintenant.

Puisque $\mathcal{C}^+(c_\varepsilon)$ (resp. $\mathcal{C}^-(c_\varepsilon)$) a été défini par déformation continue

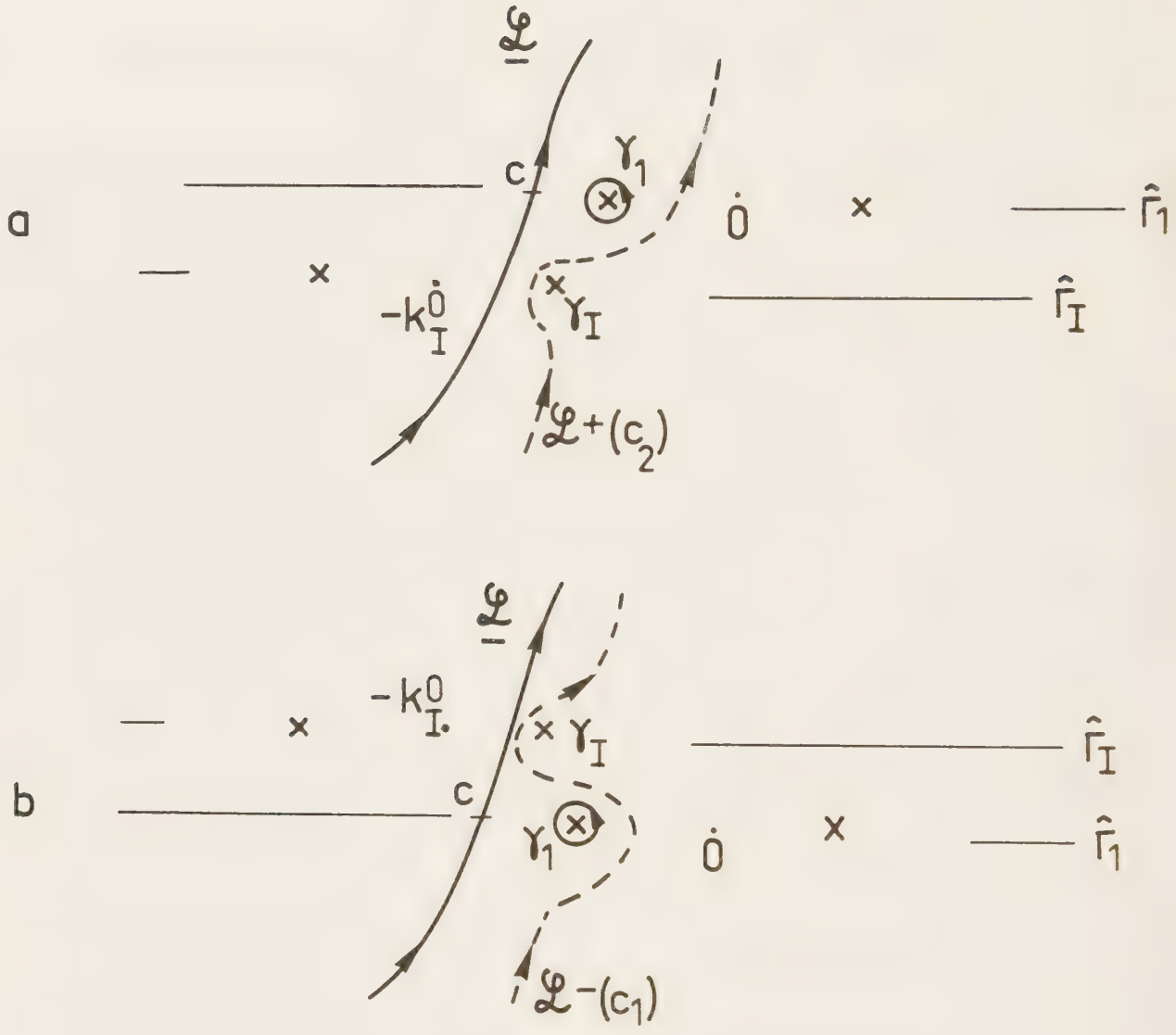

a
c
γ_1
$\dot{0}$
$\hat{\Gamma}_1$
$-k_I^{\dot{0}}$
γ_I
$\hat{\Gamma}_I$
$\mathcal{L}^+(c_2)$
b
c
γ_I
γ_1
$\mathcal{L}^-(c_1)$

FIG.6

du contour $\mathcal{C}^+(c_2)$ (resp. $\mathcal{C}^-(c_1)$) lorsque le point c_2 (resp. c_1) tend vers c_ε comme sur la Figure 2, nous introduisons d'abord un nouveau représentant de $\mathcal{C}^+(c_2)$ (resp. $\mathcal{C}^-(c_1)$). Nous choisissons $\underline{\mathcal{C}}^+(c_2)$ comme un domaine du type "poignée" dont les sections à $\vec{p}_{n+1}$ fixé sont formées de la réunion des deux contours suivants dans le plan k^o_{n+1} (Figure 6a) :

i) une ligne complexe $\underline{\mathcal{L}}$, indépendante de $\vec{p}_{n+1}$, qui traverse la droite $q^o_{n+1} = q^o_I$ toujours sur la gauche de γ_I et se faufile entre les singularités $\{\hat{\Gamma}_L, L \in \mathcal{P}^*(N\backslash I)\}$ et $\{\hat{\Gamma}_J, J \in \mathcal{P}^*(I)\}$ de l'intégrand. Soit $p^o_{n+1} = c$ le point où $\underline{\mathcal{L}}$ rencontre l'axe réel.

ii) pour les valeurs de $\vec{p}_{n+1}$ où $p^o_{n+1} = -\omega_1 = \sqrt{\vec{p}^2_{n+1} + m^2}$ (c'est-à-dire la trace de γ_1) est supérieur à c, on ajoute à $\underline{\mathcal{L}}$ un cercle $\partial\gamma_1(\vec{p}_{n+1})$ orienté dans le sens trigonométrique autour de la trace de γ_1.

La façon dont la poignée $\partial\gamma_1 = \bigcup_{|\vec{p}_{n+1}| < \sqrt{c^2-m^2}} \partial\gamma_1(\vec{p}_{n+1})$ peut être attachée de façon continue à la partie fixe $\mathbb{R}^3 \times \underline{\mathcal{L}}$ est évidente.

$\underline{\mathcal{L}}$ peut toujours être fixé dans le domaine de H^T_o quand c_2 tend vers c_ε : alors $\underline{\mathcal{C}}^+(c_\varepsilon)$ a la forme $\partial\gamma_1^+ \cup (\mathbb{R}^3 \times \underline{\mathcal{L}})$, où $\partial\gamma_1^+$ est homotope à $\partial\gamma_1$ dans le domaine de H^T_o. $\partial\gamma_1^+$ est formé de sections circulaires transverses à γ_1, nécessairement extérieures au plan k^o_{n+1} lorsque p_{n+1} appartient à l'intersection σ de γ_1 et γ_I (c'est-à-dire quand $|\vec{p}_{n+1}| = \sqrt{\frac{(p^o_I)^2}{4} - m^2}$).

On introduit de même un nouveau représentant $\underline{\mathcal{C}}^-(c_1)$ pour $\mathcal{C}^-(c_1)$ sous la forme d'un autre domaine du type "poignée" avec la même partie fixe $\mathbb{R}^3 \times \underline{\mathcal{L}}$ (Figure 6b) . Quand c_1 tend vers c_ε la poignée tend vers une position $\partial\gamma_1^-$ qui diffère seulement de $\partial\gamma_1^+$ par la façon dont elle fait le tour de σ.

Alors on peut écrire :

$$\int_{\underline{\mathcal{C}}^+(c_\varepsilon)-\underline{\mathcal{C}}^-(c_\varepsilon)} \widetilde{H}^T_o(k(c_\varepsilon), k_{n+1})\, dk_{n+1} = \int_{\partial\gamma_1^+ - \partial\gamma_1^-} \widetilde{H}^T_o(k(c_\varepsilon), p_{n+1})\, dp_{n+1} \qquad (11)$$

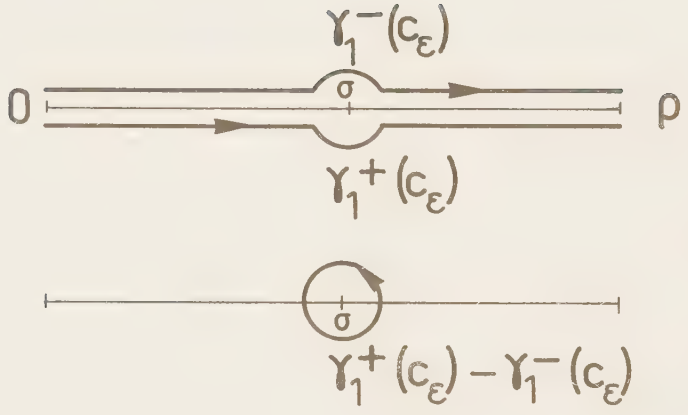

$\gamma_1^-(c_\varepsilon)$
0
σ
ρ
$\gamma_1^+(c_\varepsilon)$
σ
$\gamma_1^+(c_\varepsilon) - \gamma_1^-(c_\varepsilon)$

FIG.7

Dans l'intégrale de droite, le domaine d'intégration peut toujours être restreint à la région

$$\bigcup_{|\vec{p}_{n+1}|\leq\rho} [\vec{p}_{n+1}, \partial\gamma_1^+(\vec{p}_{n+1})] - \bigcup_{|\vec{p}_{n+1}|\leq\rho} [\vec{p}_{n+1}, \partial\gamma_1^-(\vec{p}_{n+1})]$$

où ρ est un nombre arbitraire satisfaisant les inégalités :

$$\sqrt{\frac{(p_I^o)^2}{4} - m^2} < \rho < \sqrt{c^2 - m^2} \quad .$$

Appliquons alors le théorème des résidus sous sa forme générale [9]. Il vient :

$$\int_{\partial\gamma_1^\pm} \tilde{H}_o^T(k(c_\varepsilon), p_{n+1})\, dp_{n+1} = 2i\pi \int_{\gamma_1^\pm(c_\varepsilon)} (p_{n+1}^2 - m^2)\tilde{H}_o^T(k(c_\varepsilon), p_{n+1}) \Big|_{p_{n+1}^2=m^2} \frac{d\vec{p}_{n+1}}{-2\omega_1(\vec{p}_{n+1})} \tag{12}$$

où le "contour résidu" $\gamma_1^+(c_\varepsilon)$ (resp. $\gamma_1^-(c_\varepsilon)$) doit être défini sur la couche de masse $k_I^2 = m^2$ par déformation continue d'un contour résidu correspondant $\gamma_1^+(c_2)$ (resp. $\gamma_1^-(c_1)$) que nous allons étudier maintenant. Remarquons qu'ici nous avons utilisé le fait que pour toutes les valeurs de $c_{1,2}$ et pour $p_I^2 \neq 4m^2$, la position relative des variétés γ_1 et γ_I au voisinage de leur intersection σ n'est pas dégénérée, de sorte que la méthode d'isotopie ambiante [10] est applicable.

Paramétrons γ_1 en coordonnées polaires (r,Ω) : $\vec{p}_{n+1} = r\Omega$, $|\Omega| = 1$, $|\vec{p}_{n+1}| = r$. Les contours résidus $\gamma_1^+(c_2)$ et $\gamma_1^-(c_1)$ sont tous les deux de la forme : $\{ \Omega \in S^{(3)} \} \times \{ r : 0 \leq r \leq \rho \}$. Cependant dans le cas de c_2 la trace de γ_I dans le plan complexe de r (à savoir le point $r = \sqrt{\frac{(k_I^o)^2}{4} - m^2}$) tend vers les réels à partir du demi-plan supérieur quand $c_2 \to c_\varepsilon$. Dans le cas de c_1, au contraire, quand $c_1 \to c_\varepsilon$ la trace de γ_I tend vers les réels à l'intérieur du demi-plan inférieur. La Figure 7 représente les contours résidus limites $\gamma_1^\pm(c_\varepsilon)$ dans le plan r.

Au vu de (11) et (12) et appliquant le théorème des résidus dans le plan r, il vient :

$$\int_{\mathcal{C}^+(c_\varepsilon)-\mathcal{C}^-(c_\varepsilon)} \tilde{H}_o^T(k(c_\varepsilon),p_{n+1})dp_{n+1} = (2i\pi)^2 \int_\sigma (p_{n+1}^2-m^2)\left[(p_{n+1}+p_I)^2-m^2\right]\tilde{H}_o^T(k(c_\varepsilon),p_{n+1})\Big|_\sigma \frac{\sqrt{(p_I^o)^2-4m^2}}{4p_I^o}\,d\Omega$$

ou encore

$$(2i\pi)^2 \int \tilde{H}_{o,\sigma}^{T,amp}(k(c_\varepsilon),p_{n+1})\ \delta^-(p_{n+1})\ \delta^+(p_{n+1}+p_I)\ dp_{n+1} \qquad (13)$$

où $\tilde{H}_{o,\sigma}^{T,amp}$ désigne la restriction à la sphère σ de la fonction amputée $(p_{n+1}^2-m^2)\left[(p_{n+1}+p_I)^2-m^2\right]\tilde{H}_o^T$. Finalement la limite de (13) existe pour $\varepsilon=0$ puisque l'ensemble compact d'intégration reste à l'intérieur du domaine d'analyticité de l'intégrand.

Utilisant la structure produit de H^T et la définition de H_o^T on vérifie ensuite facilement que lorsque k_{n+1} est dans un voisinage complexe de σ et $\hat{k}$ dans le tube $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_1} \times \mathcal{T}_{\mathcal{V}_2}$ la branche de $\tilde{H}_o^T$ qui intervient dans (13) est la suivante :

$$\tilde{H}_o^T = H'_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathcal{V}_1}(\hat{k}_1,k_\alpha,k_\beta)\ H''_{\underline{\alpha}\downarrow\underline{\beta}\downarrow\mathcal{V}_2}(-k_\alpha,-k_\beta,\hat{k}_2)\ [H^{(2)}(k_\alpha)]^{-1}[H^{(2)}(k_\beta)]^{-1}$$

de sorte que :

$$\tilde{H}_{o,\sigma}^{T,amp} = \frac{1}{Z^2}\hat{H}'_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathcal{V}_1}(\hat{k}_1,\vec{p}_\alpha,\vec{p}_\beta)\ \hat{H}''_{\underline{\alpha}\downarrow\underline{\beta}\downarrow\mathcal{V}_2}(\vec{p}_{\underline{\alpha}},\vec{p}_{\underline{\beta}},\hat{k}_2)$$

où les notations sont celles de la section II.1. Alors à $\varepsilon=0$ la limite de (13) peut être réécrite :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\mathcal{C}^+(c_\varepsilon)-\mathcal{C}^-(c_\varepsilon)} \tilde{H}_o^T(k(c_\varepsilon),k_{n+1})dk_{n+1}\right] = \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^2 \int \hat{H}'_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathcal{V}_1}\ \hat{H}''_{\underline{\alpha}\downarrow\underline{\beta}\downarrow\mathcal{V}_2}\ \delta_\alpha^-\delta_\beta^-\delta(p_\alpha+p_\beta+p_I)dp_\alpha dp_\beta$$

ce qui achève la preuve du Théorème 1.

d. Remarques

i) Dans ce qui précède, on a toujours supposé p_I^2 fixé supérieur à $4m^2$. Lorsque p_I^2 tend vers $4m^2$ (cas où la sphère σ dégénère en un point) le troisième terme de (2) tend vers zéro comme intégrale d'une fonction continue bornée sur un cycle dont le volume tend vers zéro. On montre dans l'Appendice que c'est aussi le cas pour les deux autres contributions.

ii) Une formule de discontinuité analogue peut être établie en introduisant la branche de H^T qui correspond au choix (-,-) sur la Figure 2. Les contributions des discontinuités sur les faces $q_I^o = 0$ et $q_{N\setminus I}^o = 0$ sont du même type que celles analysées au paragraphe b avec des contours appropriés $\tilde{\mathcal{C}}_{s_1}$ et $\tilde{\mathcal{C}}_{s_2}$.

La contribution due au pincement des contours est la suivante :

$$(\frac{2i\pi}{Z})^2 \int \hat{H}'_{\alpha\uparrow\beta\uparrow s_1} \quad \hat{H}''_{\underline{\alpha}\uparrow\underline{\beta}\uparrow s_2} \; \delta_\alpha^- \; \delta_\beta^- \; \delta(p_\alpha + p_\beta + p_I) \; dp_\alpha \; dp_\beta$$

Les deux écritures sont équivalentes : dans la suite l'une ou l'autre sera plus adaptée selon que l'on cherche à exploiter les conséquences de la complétude asymptotique des états "sortants" ou "entrants" (voir la Section V).

III. ETUDE DE L'EQUATION GENERALE DE BETHE-SALPETER

Dans cette section on introduit la partie irréductible d'ordre deux de la fonction de quatre points dans un canal à deux particules (par exemple la voie s) comme solution analytique de l'équation générale de Bethe-Salpeter habituellement représentée sous la forme graphique

(14)

à laquelle on va donner un sens précis du point de vue des propriétés

analytiques et algébriques des fonctions de quatre points.

Par la suite pour paramétrer l'espace $\mathbb{C}^{12}$ des quadri-impulsions on utilisera indifféremment la notation symétrique habituelle

$$k \equiv \{k_j = p_j + iq_j \ , \ 1 \leq j \leq 4 \ ; \ \sum_{j=1}^{4} k_j = 0\}$$

ou celle en coordonnées barycentriques (Z,Z',K) plus utile dans l'étude des équations de Fredholm, avec :

$$K = P + iQ = k_1 + k_2 = -(k_3 + k_4)$$

$$Z \equiv X + iY = k_1 - k_2$$

$$Z' \equiv X' + iY' = k_3 - k_4$$

Dans le domaine primitif $\mathcal{D}^{(4)}$ de la fonction de quatre points on considère alors l'analogue de (14) sous la forme de l'équation de Fredholm suivante :

$$F(Z,Z',K) \ G(Z,Z',K;\lambda) = \lambda \int_{\Gamma} F(Z,Z_1,K) \ G(Z_1,Z',K;\lambda) \left[H^{(2)}\left(\frac{Z_1+K}{2}\right)\right]^{-1} \left[H^{(2)}\left(\frac{Z_1-K}{2}\right)\right]^{-1} dZ_1 \qquad (15)$$

Ici F(Z,Z',K) représente la partie irréductible d'ordre un de la fonction de quatre points dans la voie s, soit $F^{\{1,2\};\{3,4\}}$, introduite et étudiée précédemment [4] ; G(Z,Z',K ; λ) est le noyau de Fredholm réciproque qu'il s'agit d'étudier ; $\Gamma = \mathbb{R}^3 \times \mathcal{L}$ est un contour complexe de dimension réelle quatre dans l'espace $\mathbb{C}^4$ de la variable d'intégration Z_1 qui se faufile entre les singularités de l'intégrand et dont les parties infinies sont euclidiennes [1].

Afin d'éviter les divergences à l'infini dans ces directions, il est nécessaire de régulariser F(Z,Z',K) en le multipliant par le facteur de"cut-off" analytique suivant :

$$\rho(k) = \prod_{j=1}^{4} \left(\frac{m^2 - \mu^2}{k_j^2 - \mu^2}\right)^r$$

où μ et r sont des nombres positifs suffisamment grands. Cette régularisation permet de se débarasser du comportement polynomial de F à l'infini dans les tubes sans modifier son domaine d'analyticité ni sa restriction sur la couche de masse.

La conservation de la structure primitive des fonctions de quatre points par convolution permet alors d'établir la

Proposition 1

Il existe une solution $G(Z,Z',K\,;\lambda)$ de l'équation (15) qui est fonction méromorphe dans le domaine $\{(Z,Z',K) \in \mathcal{D}^{(4)}\} \times \{\lambda \in \mathbb{C}\}$.

Preuve :

Reprise de [3] ; nous l'esquissons seulement. Les formules de la théorie classique de Fredholm indiquent [11] que l'équation (15) est satisfaite identiquement par la fonction suivante :

$$G(Z,Z',K\,;\lambda) = \frac{B(Z,Z',K\,;\lambda)}{A(K\,;\lambda)}$$

avec $$A(K\,;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} A_n(K) \qquad (16)$$

$$B(Z,Z',K\,;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} B_n(Z,Z',K) \qquad (17)$$

et $$A_o(K) = 1 \,, \quad B_o(Z,Z',K) = F(Z,Z',K)$$

$$A_n(K) = \int_{\Gamma^n} \begin{vmatrix} F(Z_1,Z_1,K) & \dots & F(Z_1,Z_n,K) \\ & & \\ F(Z_n,Z_1,K) & \dots & F(Z_n,Z_n,K) \end{vmatrix} \prod_{j=1}^{n} \left[H^{(2)}\left(\frac{Z_j+K}{2}\right)\right]^{-1} \left[H^{(2)}\left(\frac{Z_j-K}{2}\right)\right]^{-1} dZ_j$$

$$B_n(Z,Z',K) = \int_{\Gamma^n} \begin{vmatrix} F(Z,Z',K) & F(Z,Z_1,K) & \dots & F(Z,Z_n,K) \\ F(Z_1,Z',K) & F(Z_1,Z_1,K) & \dots & F(Z_1,Z_n,K) \\ & & & \\ F(Z_n,Z',K) & F(Z_n,Z_1,K) & \dots & F(Z_n,Z_n,K) \end{vmatrix} \prod_{j=1}^{n} [H^{(2)}(\frac{Z_j+K}{2})]^{-1} [H^{(2)}(\frac{Z_j-K}{2})]^{-1} dZ$$

On a vu [4] que $F(Z,Z',K)$ est une fonction de quatre points générale, à l'exception d'un nombre fini de pôles réels du type C.D.D. généralisé $\{k_I^2 = \alpha_\nu, 0 < \alpha_\nu < m^2\}$. Comme on l'a montré dans l'étude des produits de convolution [1] chaque déterminant $B_n(Z,Z',K)$ (resp. $A_n(K)$) est alors une fonction de quatre points (resp. deux points) générale à l'exception de ces mêmes singularités. La définition de $G(Z,Z',K;\lambda)$ est alors indépendante du contour Γ. En ce qui concerne la convergence (absolue) de chacune des séries (16) et (17), elle est établie dans tout le plan complexe λ par les majorations suivantes [3] :

$$|A_n(K)| \leq C^n \, n^{n/2} \left(1 + \frac{1}{d(Z,Z',K)}\right)^{nM}$$

$$|B_n(Z,Z',K)| \leq C'^n \, (n+1)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{1}{d(Z,Z',K)}\right)^{(n+1)M} \qquad (18)$$

où C et C' sont des constantes positives, M un entier et $d(Z,Z',K)$ la distance du point (Z,Z',K) au bord $\partial\mathfrak{D}^{(4)}$ de $\mathfrak{D}^{(4)}$. Les sommes $A(K;\lambda)$ et $B(Z,Z',K;\lambda)$ sont alors des fonctions analytiques dans le domaine produit $\{(Z,Z',K) \in \mathfrak{D}^{(4)}\} \times \{\lambda \in \mathbb{C}\}$, à l'exception des pôles réels en nombre fini $\{k_I^2 = \alpha_\nu \; ; \; 0 < \alpha_\nu < m^2\}$. D'où la méromorphie de $G(Z,Z',K;\lambda)$ dans ce domaine.

Remarques

1) Outre les pôles $k_I^2 = \alpha_\nu$, les seules singularités possibles du noyau réciproque sont alors induites par les zéros de $A(K;\lambda)$ et localisées sur des sous-variétés analytiques du type $f(K;\lambda) = 0$. Ces singularités

provoquées par les zéros d'une fonction de deux points générale peuvent être également considérées comme des singularités C.D.D. généralisées.

2) Les estimations (18) établissent que chaque déterminant $A_n(K)$ et $B_n(Z,Z',K\,;\lambda)$ a des valeurs au bord distributions sur la frontière de $\mathfrak{D}^{(4)}$. Mais elles sont insuffisantes pour conclure en ce qui concerne les sommes $A(K\,;\lambda)$ et $B(Z,Z',K\,;\lambda)$: si chaque terme d'une série de fonctions analytiques tend vers une distribution et si l'ordre de celle-ci croit linéairement avec le rang du terme, on ne peut rien dire des valeurs au bord de la somme, tout au moins au sens des distributions.

Cependant, comme conséquence du postulat de continuité de la mesure spectrale, on a vu (Proposition C.1 de [4]) que la fonction $F(Z,Z',K)$ possède sur la face $\mathrm{Im}\,K = 0$ des valeurs au bord $F^{\pm}(Z,Z',P) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon\in V^+}} F(Z,Z',P\pm i\varepsilon)$ analytiques en (Z,Z') et fonctions Hölder-continues en P dans l'ouvert "non C.D.D."

$$\hat{\Sigma} = \{\, p\in \mathbb{R}^4 \,:\; p^2\geq 4m^2 \;,\; H^{(2)}(p)\neq 0 \,\}$$

Pour une valeur fixée de λ, considérons alors la région à deux particules moins les zéros réels C.D.D. et moins ceux ("C.D.D. généralisés") du déterminant de Fredholm à deux points $A(P\,;\lambda)$:

$$\hat{\Sigma}^{(2)}_\lambda = \{\, p\in \mathbb{R}^4 \,:\; p\in V^+,\; 4m^2\leq p^2 < 9m^2,\; H^{(2)}(p)\neq 0,\; A(p\,;\lambda)\neq 0 \,\}$$

On vérifie facilement (comme en [4] Proposition 7) que $\hat{\Sigma}^{(2)}_\lambda$ est ouvert et dense dans $\Sigma^{(2)}$.

De la conservation de la continuité en p_I des valeurs au bord par convolution et sommation des séries de Fredholm (établie dans l'Appendice), il vient alors directement :

Proposition 2

A l'intérieur des tubes aplatis
$\{(Z,Z',P) \,:\, \mathrm{Im}\,Z\in V^{\pm}\;,\; \mathrm{Im}\,Z'\in V^{\pm}\;,\; P\in \hat{\Sigma}^{(2)}_\lambda\}$

les valeurs au bord $G_{\pm}(Z,Z',P\,;\lambda) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon\in V^+}} G(Z,Z',P\pm i\varepsilon\,;\lambda)$ sont analytiques en $(Z,Z')^{\blacklozenge}$ et continues bornées en P.

Il demeure cependant qu'au voisinage des faces $\mathrm{Im}\,Z = 0$ et $\mathrm{Im}\,Z' = 0$, les bornes (18) ne permettent pas de montrer la croissance lente de $G(Z,Z',K\,;\lambda)$: on ne peut donc rien dire des valeurs au bord sur ces faces au sens des distributions.

IV. LE CAS GENERAL

Dans cette section on aborde maintenant la définition des fonctions irréductibles d'ordre deux dans n'importe quel canal $(I,N\setminus I)$ et pour n arbitraire. Comme précédemment il s'agit de suivre la théorie des perturbations et d'incorporer au formalisme des fonctions de n points les équations intégrales graphiques qu'on y trouve.

L'introduction de la partie irréductible d'ordre deux de la fonction de n points dans le canal $(I,N\setminus I)$, notée $G^{I,N\setminus I}$, se fait par récurrence sur $n_1 = |I|$ et $n_2 = |N\setminus I|$ en partant du cas $n_1 = n_2 = 2$ étudié à la section III. A chaque étape de la récurrence le lecteur vérifiera facilement que

i) la théorie des perturbations procure deux équations intégrales susceptibles de définir $G^{I,N\setminus I}$,

ii) ces deux définitions sont équivalentes au vu des étapes précédentes de la récurrence,

iii) une fois étudié le cas initial $n_1 = n_2 = 2$, l'une au moins de ces définitions n'est plus une équation de Fredholm mais donne une expression explicite en termes de fonctions connues.

$^{\blacklozenge}$ Sauf sur les faces $\mathrm{Im}\,Z = \pm\,\mathrm{Im}\,Z'$.

On part de l'ensemble des fonctions $F^{I,N\setminus I}$ irréductibles d'ordre un dans le canal $(I,N\setminus I)$ définies et étudiées précédemment [4]. Comme à la Section III afin d'éviter des divergences à l'infini dans les intégrales de convolution, toutes les fonctions $F^{I,N\setminus I}$ y sont régularisées par le facteur de "cut-off" analytique suivant :

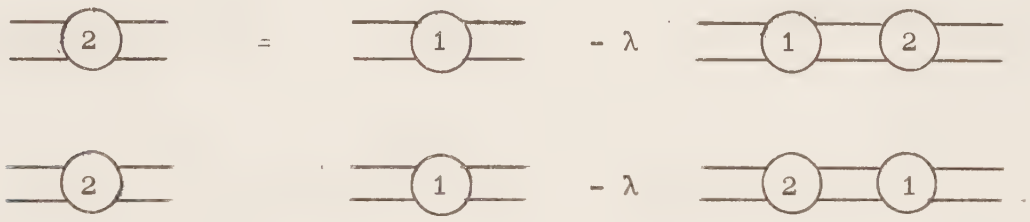
$$\rho(k) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{m^2-\mu^2}{k_j^2-\mu^2}\right)^r$$

avec μ et r suffisamment grands.

Alors les diverses étapes de la récurrence sont les suivantes :

i) $|I| = |N\setminus I| = 2$

On choisit indifféremment l'une des relations suivantes :

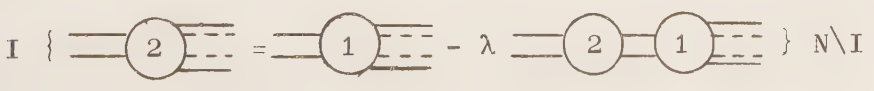


(Pour vérifier l'équivalence des définitions, utiliser l'associativité et la distributivité de la convolution). On choisit par exemple (la notation $\circledast$ représente l'intégrale de convolution) :

$$G\{1,2\};\{3,4\} = F\{1,2\};\{3,4\} - \lambda\, F\{1,2\};\{\alpha,\beta\} \circledast G\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};\{3,4\}$$

ii) $|I| = 2, \quad |N\setminus I| > 2$

On choisit



$$G^{I,N\setminus I} = F^{I,N\setminus I} - \lambda\, G^{I};\{\alpha,\beta\} \circledast F\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};N\setminus I$$

L'autre relation est inadéquate (équation de Fredholm) :

iii) $|I| > 2, \quad |N\backslash I| > 2$

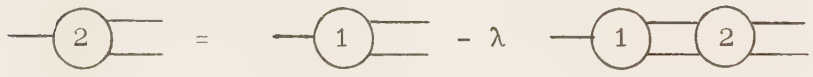
Indifféremment :

par exemple :

$$G^{I,N\backslash I} = F^{I,N\backslash I} - \lambda\, F^{I}\,;\, \{\alpha,\beta\} \circledast G\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\}\,;\, N\backslash I$$

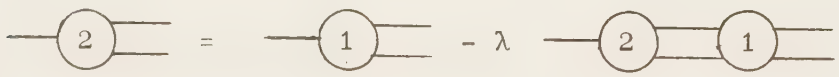
iv) $|I| = 1, |N\backslash I| = 2$

Prendre :



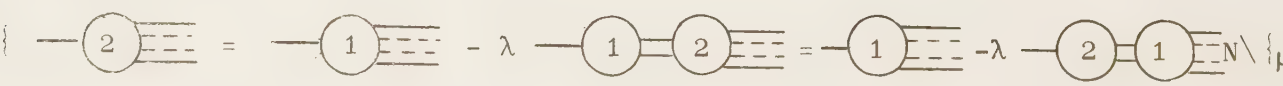
$$G\{1\}\,;\,\{2,3\} = F\{1\}\,;\,\{2,3\} - \lambda\{1\}\,;\,\{\alpha,\beta\} \circledast G\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\}\,;\,\{2,3\}$$

L'autre relation est de Fredholm :



v) $|I| = 1, \quad |N\backslash I| > 2$

Indifféremment :

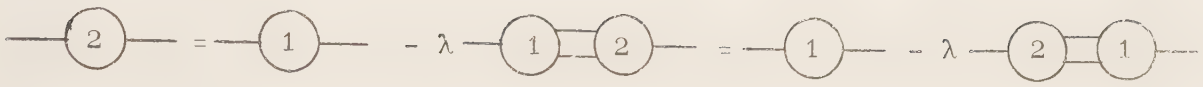


par exemple :

$$G\{\mu\}\,;\,N\backslash\{\mu\} = F\{\mu\}\,;\,N\backslash\{\mu\} - \lambda\, G\{\mu\}\,;\,\{\alpha,\beta\} \circledast F\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\}\,;\,N\backslash\{\mu\}$$

vi) $|I| = |N\backslash I| = 1$

Indifféremment :



$$G^{\{1\};\{2\}} = F^{\{1\};\{2\}} - \lambda\, F^{\{1\};\{\alpha,\beta\}} \otimes G^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};\{2\}}$$

Alors la Proposition 1 et la conservation de la structure analytique primitive des fonctions de n points par convolution [1] permettent d'énoncer la

Proposition 3

Les fonctions $G^{I,N\backslash I}(k;\lambda)$ ainsi introduites sont méromorphes dans le domaine $\{k\in\mathcal{D}^{(n)}\}\times\{\lambda\in\mathbb{C}\}$ (où $\mathcal{D}^{(n)}$ désigne le domaine primitif de n points).

Outre un nombre fini de pôles réels $\{k_I^2 = \alpha_\nu,\ 0<\alpha_\nu<m^2\}$, les seules singularités de $G^{I,N\backslash I}(k;\lambda)$ dans ce domaine sont alors induites par les zéros de $A(k_I;\lambda)$.

Le résultat suivant est alors une conséquence directe de la Proposition C.1 de [4] et de la Proposition 2 ci-dessus, une fois prises en compte la conservation de la continuité en p_I par convolution (Proposition A.2 de l'Appendice):

Proposition 4

Soit $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$ deux cellules adjacentes séparées par la partition $(I,N\backslash I)$ et $(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)$ le couple de cellules induites d'ordre inférieur. A l'intérieur du tube aplati

$$\hat{\mathcal{T}}_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} = \{(p_I,\hat{k})\in\mathbb{C}^{4(n-2)} : p_I\in\hat{\Sigma}_\lambda^{(2)},\ \hat{k}\in\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1}\times\mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}\}$$

les valeurs au bord $G^{I,N\setminus I}_{\underset{\pm}{s}}(p_I,\hat{k}\,;\lambda)$ sont analytiques en $\hat{k}$ ♦ et continues bornées en p_I.

On ne peut rien dire au sens des distributions des valeurs au bord de $G^{I,N\setminus I}_{\underset{\pm}{s}}$ sur les autres faces du tube $\mathcal{T}_{\underset{\pm}{s}}$.

V. L'ALGORITHME ALGEBRIQUE D'IRREDUCTIBILITE

Cette section est consacrée à la preuve de l'irréductibilité d'ordre deux pour $\lambda = \frac{1}{2}$ des fonctions $G^{I,N\setminus I}$ définies à la section précédente. Il s'agit d'établir que la région de coïncidence de chaque fonction $G^{I,N\setminus I}(k\,;\frac{1}{2})$ dans le canal $(I,N\setminus I)$ est de la forme :

$$\mathcal{R}_I^{(2)} = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} \;:\; p_I^2 < 9m^2\}$$

Ou encore que chaque partie absorptive $\Delta_{s_1 s_2}\, G^{I,N\setminus I}(p_I,\hat{k}\,;\frac{1}{2})$ avec $s_1 \in S(I)$, $s_2 \in S(N\setminus I)$, s'annule dans le tube aplati suivant de la face $q_I = q_{N\setminus I} = 0$:

$$\{(p_I,\hat{k}) \in \mathbb{C}^{4(n-2)} \;:\; p_I^2 < 9m^2 \;\;;\;\; \hat{k} \in \mathcal{T}_{s_1} \times \mathcal{T}_{s_2}\}$$

Au vu du théorème edge of the wedge, les deux propriétés sont en effet équivalentes.

On a vu que sur la base du postulat de continuité de la mesure spectrale (Proposition 4), $\Delta_{s_1 s_2}\, G^{I,N\setminus I}(p_I,\hat{k}\,;\lambda)$ est une fonction continue bornée de la variable p_I dans l'ouvert $\hat{\Sigma}_\lambda^{(2)}$. Tout ce qui suit est donc établi, à p_I fixé, au sens des fonctions continues.

♦ Sauf sur les faces associées aux partitions transverses à $(I,N\setminus I)$.

Rappelons d'abord certains résultats sur la complétude des états asymptotiques à deux particules.

V.1 Les relations de complétude à deux particules.

Dans les régions à deux particules $\{p_I \in \Sigma^{(2)}\}$ avec

$\Sigma^{(2)} = \{ p \in \mathbb{R}^4 : p \in V^+, 4m^2 \leq p^2 < 9m^2\}$

toute l'information non linéaire de la théorie des champs est exprimée par les"équations de complétude" suivantes écrites pour n'importe quelle partie absorptive dans n'importe quel canal [4,8] :

$$\Delta_{s_1 s_2} H^{(n)} = \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^2 \frac{1}{2!} \hat{H}^{(n_1+2)}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow s_1} * \hat{H}^{(n_2+2)}_{\underline{\alpha}\downarrow\underline{\beta}\downarrow s_2} = \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^2 \frac{1}{2!} \hat{H}^{(n_1+2)}_{\alpha\uparrow\beta\uparrow s_1} * \hat{H}^{(n_2+2)}_{\underline{\alpha}\uparrow\underline{\beta}\uparrow s_2} \qquad (19)$$

où les notations sont celles de la section II.1.

Ces relations ont en général un sens du point de vue des distributions en p_I : on montre en effet [8] que la distribution $\hat{H}^{(n+2)}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow s}$ (resp. $\hat{H}^{(n+2)}_{\alpha\uparrow\beta\uparrow s}$), une fois testée dans les variables de s, est une fonction de carré intégrable sur la couche de masse $\sigma = \{p_\alpha \in H_m^-,\ p_\beta \in H_m^-\}$.

Le postulat de continuité de la mesure spectrale leur donne aussi un sens du point de vue des fonctions continues en p_I. On a vu (Section II.1) que $\hat{H}^{(n+2)}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow s}$ (resp. $\hat{H}^{(n+2)}_{\alpha\uparrow\beta\uparrow s}$), une fois testée dans les variables de s, est une fonction continue sur la sphère σ, restriction d'une fonction analytique dans le voisinage de σ.

On montre alors [4] que les relations de complétude (19) sont <u>équivalentes</u> aux relations similaires suivantes satisfaites par les fonctions irréductibles d'ordre un $\{F^{I,N\setminus I}\}$:

$$\Delta_{s_1 s_2} F^{I,N\setminus I} = \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^2 \frac{1}{2!}\, \hat{F}^{I;\{\alpha,\beta\}}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow s_1} * \hat{F}^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};N\setminus I}_{\underline{\alpha}\downarrow\underline{\beta}\downarrow s_2} = \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^2 \frac{1}{2!}\, \hat{F}^{I;\{\alpha,\beta\}}_{\alpha\uparrow\beta\uparrow s_1} * \hat{F}^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};N\setminus I}_{\underline{\alpha}\uparrow\underline{\beta}\uparrow s_2} \tag{20}$$

pourvu que les configurations exceptionnelles correspondant aux éventuelles singularités C.D.D. aient été écartées. C'est-à-dire dans les régions $\{p_I \in \hat{\Sigma}^{(2)}\}$, avec

$$\hat{\Sigma}^{(2)} = \{p \in \mathbb{R}^4 : p \in V^+,\ 4m^2 \leq p^2 < 9m^2,\ H^{(2)}(p) \neq 0\}$$

ouvert et dense dans $\Sigma^{(2)}$.
C'est une extension de (19) et (20) dans certains tubes aplatis que nous étudions maintenant.

V.2 Extension dans les complexes.

Considérons les relations de complétude

$$\Delta_{s_1 s_2} H^{(n)} = \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^2 \frac{1}{2!}\, \hat{H}^{(n_1+2)}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow s_1} * \hat{H}^{(n_2+2)}_{\underline{\alpha}\downarrow\underline{\beta}\downarrow s_2} \tag{21}$$

satisfaites dans $\{p_I \in \Sigma^{(2)}\}$. $\Delta_{s_1 s_2} H^{(n)}(p_I,\hat{p})$ est une fonction continue bornée en p_I, valeur au bord au sens des distributions en $\hat{p}$ de la partie absoprtive $\Delta^I H^{(n)}(p_I,\hat{k})$ à l'intérieur du tube aplati :

$$\mathcal{T}_{s_1 s_2} = \{(p_I,\hat{k}) \in \mathbb{C}^{4(n-2)} : p_I \in \Sigma^{(2)},\ \hat{k} \in \mathcal{T}_{s_1} \times \mathcal{T}_{s_2}\}$$

Considérons également la fonction

$$H^{\Gamma}(p_I,\hat{k}_1,\hat{k}_2) = \int \delta^-_\alpha \delta^-_\beta\, \delta(p_\alpha+p_\beta+p_I)\,dp_\alpha dp_\beta\, \hat{H}^{(n_1+2)}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow s_1}(p_\alpha,p_\beta,\hat{k}_1)\hat{H}^{(n_2+2)}_{\underline{\alpha}\downarrow\underline{\beta}\downarrow s_2}(-p_\alpha,-p_\beta,\hat{k}_2$$

(22)

où $\hat{k} = (\hat{k}_1,\hat{k}_2)$ est choisi dans le domaine primitif d'analyticité $\mathcal{T}_I$ de la fonction $\Delta^I H^{(n)}$, c'est-à-dire dans la réunion de tous les tubes

$\{\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1} \times \mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}$; $\mathcal{S}_1 \in S(I)$, $\mathcal{S}_2 \in S(N\backslash I)\}$ avec des voisinages complexes appropriés les connectant.

La variable d'intégration décrit le compact σ et on a vu (Proposition C.1 de [4])que chaque facteur de l'intégrand a une dépendance analytique par rapport à $\hat{k}_1$ (resp. $\hat{k}_2$). Cela suffit pour conclure à l'analyticité de $H^{\prime}$ en $\hat{k}$ dans $\mathcal{D}_I$. Le second membre de (21) est alors la valeur au bord de $H^{\prime}$ à l'intérieur de $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2}$.

Le théorème edge of the wedge établit ensuite la coïncidence des fonctions analytiques correspondantes

$$\Delta^I \, H^{(n)} \, (p_I, \hat{k}) = H^{\Gamma}(p_I, \hat{k})$$

à l'intérieur de tout le "domaine aplati" :

$$\{ (p_I, \hat{k}) \in \mathbb{C}^{4(n-2)} \, : \, p_I \in \Sigma^{(2)}, \, \hat{k} \in \mathcal{D}_I \}$$

L'équivalence des systèmes (19) et (20) rappelée plus haut peut alors se reformuler :

Proposition 5

Chaque relation des systèmes non linéaires (19) et (20) se prolonge à l'intérieur du domaine correspondant

$$\{ (p_I, \hat{k}) \in \mathbb{C}^{4(n-2)} \, : \, p_I \in \hat{\Sigma}^{(2)}, \, \hat{k} \in \mathcal{D}_I \}$$

et les deux systèmes ainsi obtenus y sont équivalents.

Finalement nous aurons également besoin du résultat préliminaire suivant :

Proposition 6

A l'intérieur du tube aplati

$$\hat{\mathcal{E}}_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} = \{(p_I,\hat{k}) \in \mathbb{C}^{4(n-2)} : p_I \in \hat{\Sigma}^{(2)}_{\lambda},\ \hat{k} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}_1} \times \mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}\}$$

la partie absorptive $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} G^{I,N\setminus I}(p_I,\hat{k};\lambda)$ est donnée par la relation intégrale (condensée) suivante :

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} G^{I,N\setminus I} = \Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} F^{I,N\setminus I} - \lambda\, G^{I;\{\alpha,\beta\}} \circledast \Delta F^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};N\setminus I} - \lambda \Delta G^{I;\{\alpha,\beta\}} \circledast F^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};N\setminus I}$$

$$- \lambda \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^2 \hat{G}^{I;\{\alpha,\beta\}}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathcal{S}_1} * \hat{F}^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};N\setminus I}_{\underline{\alpha}\downarrow\underline{\beta}\downarrow\mathcal{S}_2} \qquad (23)$$

où $\hat{G}^{I;\{\alpha,\beta\}}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathcal{S}_1}$ désigne la restriction (continue) à la couche de masse σ de la fonction amputée $(p_\alpha^2 - m^2)\ (p_\beta^2 - m^2)\ G^{I;\{\alpha,\beta\}}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathcal{S}_1}$.

Preuve :

On part de l'équation générale de définition

$$G^{I,N\setminus I} = F^{I,N\setminus I} - \lambda\, G^{I;\{\alpha,\beta\}} \circledast F^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};N\setminus I}$$

et on applique le Théorème 1 au produit de convolution du second membre. Les Propositions C.1 de [4] et 4 ci-dessus établissent les hypothèses de continuité en p_I nécessaires. (23) n'est alors qu'une forme condensée de (2) avec les spécifications convenables.

V.3 Preuve de l'irréductibilité.

Il s'agit maintenant d'établir que chaque partie absorptive $\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} G^{I,N\setminus I}(p_I,\hat{k};\frac{1}{2})$ s'annule dans le tube aplati :

$$\{(p_I,\hat{k}) \in \mathbb{C}^{4(n-2)} : \ p_I^2 < 9m^2\ ,\ \hat{k} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}_1} \times \mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}\}$$

Ou encore, au vu des propriétés d'irréductibilité d'ordre un [4] des fonctions $F^{I,N\setminus I}$, à l'intérieur de

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2} = \{(p_I,\hat{k}) \in \mathbb{C}^{4(n-2)} \; : \; p_I \in \Sigma^{(2)} \; , \; \hat{k} \in \mathcal{T}_{\mathfrak{s}_1} \times \mathcal{T}_{\mathfrak{s}_2}\}$$

Ecartant les situations exceptionnelles correspondant aux singularités du type C.D.D. ou généralisé, nous allons prouver le

Théorème 2

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, la propriété d'irréductibilité de chaque fonction $G^{I,N\setminus I}$

$$\Delta_{\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2} G^{I,N\setminus I}(p_I,\hat{k};\tfrac{1}{2}) = 0$$

est satisfaite à l'intérieur du tube aplati

$$\hat{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2} = \{(p_I,\hat{k}) \in \mathbb{C}^{4(n-2)} \; : \; p_I \in \hat{\Sigma}^{(2)}_{1/2} \; , \; \hat{k} \in \mathcal{T}_{\mathfrak{s}_1} \times \mathcal{T}_{\mathfrak{s}_2}\}$$

L'ensemble de ces relations est équivalent au système non linéaire (20) (prolongé dans les mêmes tubes) :

$$\Delta_{\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2} F^{I,N\setminus I} = \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^2 \frac{1}{2!} \hat{F}^{I;\{\alpha,\beta\}}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathfrak{s}_1} * \hat{F}^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};N\setminus I}_{\underline{\alpha}\downarrow\underline{\beta}\downarrow\mathfrak{s}_2}$$

lui-même équivalent (Proposition 5) aux relations de complétude à deux particules :

$$\Delta_{\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2} H^{(n)} = \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^2 \frac{1}{2!} \hat{H}^{(n_1+2)}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow\mathfrak{s}_1} * \hat{H}^{(n_2+2)}_{\underline{\alpha}\downarrow\underline{\beta}\downarrow\mathfrak{s}_2}$$

Remarque

On se borne pour simplifier à des monômes de Steinmann du type $\downarrow$, c'est-à-dire à la complétude des états asymptotiques sortants. La preuve irait de même pour des états entrants (voir II.3.d).

Preuve :

Notons d'abord pour n'importe quel canal $(I,N\setminus I)$

$$\Theta_{s_1 s_2} - \Delta_{s_1 s_2} F^{I,N\setminus I} - \left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^2 \frac{1}{2!} \hat{F}^{I;\{\alpha,\beta\}}_{\alpha\downarrow\beta\downarrow s_1} * \hat{F}^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};N\setminus I}_{\underline{\alpha}\downarrow\underline{\beta}\downarrow s_2}$$

le noyau de complétude à deux particules de la fonction $F^{I,N\setminus I}$.
La preuve va alors en trois étapes.

i) Le contour $\mathcal{C}_{s_1}$ qui intervient dans le produit de convolution $G^{I;\{\alpha,\beta\}} \circledast \Delta F^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};N\setminus I}$ du second membre de (23) est tracé dans la face $q_{\underline{\alpha}} + q_{\underline{\beta}} = 0$ des variables $(k_{\underline{\alpha}}, k_{\underline{\beta}}, \{k_j,\ j \in N\setminus I\})$. A la Section II.3.b, des considérations d'analyticité locale ont montré que le produit $\{k_{\underline{\alpha}} \in \mathcal{C}_{s_1}\} \times \mathcal{T}_{s_2}$ appartient au domaine d'analyticité du prolongement commun (noté $\Delta_{\underline{\alpha}\downarrow\uparrow\underline{\beta},s_2}$) des parties absorptives $\Delta_{\underline{\alpha}\uparrow\underline{\beta},s_2}$ et $\Delta_{\underline{\alpha}\downarrow\underline{\beta},s_2}$ de toute fonction de (n_2+2) points.
Appliquant la Proposition 5, nous désignons désormais par $\Theta_{\underline{\alpha}\downarrow\uparrow\underline{\beta},s_2}$ le prolongement commun à $\mathcal{C}_{s_1} \times \mathcal{T}_{s_2}$ de $\Theta_{\underline{\alpha}\uparrow\underline{\beta},s_2}$ et $\Theta_{\underline{\alpha}\downarrow\underline{\beta},s_2}$.
Alors nous pouvons réécrire (23) sous la forme :

$$\Delta_{s_1 s_2} G^{I,N\setminus I} + \lambda\ \Delta G^{I;\{\alpha,\beta\}} \circledast F^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};N\setminus I} = \Delta_{s_1 s_2} F^{I,N\setminus I} - \lambda\ G^{I;\{\alpha,\beta\}} \circledast \Theta_{\underline{\alpha}\downarrow\uparrow\underline{\beta},s_2}$$

$$-\left(\frac{2i\pi}{Z}\right)^2 \lambda \left[\hat{G}^{I;\{\lambda,\mu\}}_{\lambda\downarrow\mu\downarrow s_1} + \frac{1}{2!} G^{I;\{\alpha,\beta\}} \circledast F^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};\{\lambda,\mu\}}_{\lambda\downarrow\mu\downarrow\underline{\alpha}\downarrow\uparrow\underline{\beta}} \right] * \hat{F}^{\{\underline{\lambda},\underline{\mu}\};N\setminus I}_{\underline{\lambda}\downarrow\underline{\mu}\downarrow s_2} \qquad (24)$$

Mais le dernier crochet peut se transformer à l'aide de l'expression :

$$\lambda G^{I;\{\alpha,\beta\}}_{\alpha\downarrow\uparrow\beta\downarrow s_1} \circledast \hat{F}^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};\{\lambda,\mu\}}_{\lambda\downarrow\mu\downarrow\underline{\alpha}\downarrow\uparrow\underline{\beta}} = \hat{F}^{I;\{\lambda,\mu\}}_{\lambda\downarrow\mu\downarrow s_1} - \hat{G}^{I;\{\lambda,\mu\}}_{\lambda\downarrow\mu\downarrow s_1} \qquad (25)$$

qui n'est autre qu'une des équations de définition de la Section IV pour $N\setminus I = \{\lambda,\mu\}$, après amputation et restriction à la couche de masse dans ces variables. (Remarquer que l'intégration sur les variables internes a lieu sur le contour $\mathcal{C}_{s_1}$ qui est évidemment un "bon" contour dans ce cas).

Utilisant (25) on obtient :

$$\lambda \left[\hat{G}^{I;\{\lambda,\mu\}}_{\lambda\downarrow\mu\downarrow\mathfrak{s}_1} + \frac{1}{2\dot{|}}\, G^{I;\{\alpha,\beta\}} \circledast \hat{F}^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};\{\lambda,\mu\}}_{\lambda\downarrow\mu\downarrow\underline{\alpha}\uparrow\underline{\beta}} \right] = \frac{1}{2\dot{|}}\, \hat{F}^{I;\{\lambda,\mu\}}_{\lambda\downarrow\mu\downarrow\mathfrak{s}_1} + (\lambda - \frac{1}{2\dot{|}})\, \hat{G}^{I;\{\lambda,\mu\}}_{\lambda\downarrow\mu\downarrow\mathfrak{s}_1}$$

ce qui permet d'écrire (24) sous la forme :

$$\Delta_{\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2} G^{I,N\backslash I} + \lambda \Delta G^{I;\{\alpha,\beta\}} \circledast F^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};N\backslash I} = \circledcirc_{\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2} - \lambda\, G^{I;\{\alpha,\beta\}} \circledast \circledcirc_{\underline{\alpha}\uparrow\underline{\beta},\mathfrak{s}_2}$$

$$- (\lambda - \frac{1}{2\dot{|}})\, (\frac{2i\pi}{Z})^2\, \hat{G}^{I;\{\lambda,\mu\}}_{\lambda\downarrow\mu\downarrow\mathfrak{s}_1} * \hat{F}^{\{\underline{\lambda},\underline{\mu}\};N\backslash I}_{\underline{\lambda}\downarrow\underline{\mu}\downarrow\mathfrak{s}_2}$$

C'est, pour $\lambda = \frac{1}{2}$, l'algorithme général que nous allons désormais utiliser :

$$\Delta_{\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2} G^{I,N\backslash I} + \frac{1}{2}\, \Delta G^{I;\{\alpha,\beta\}} \circledast F^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};N\backslash I} = \circledcirc_{\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2} - \frac{1}{2}\, G^{I;\{\alpha,\beta\}} \circledast \circledcirc_{\underline{\alpha}\uparrow\underline{\beta},\mathfrak{s}_2} \qquad (26)$$

ii) On applique d'abord les relations (20) : $\circledcirc_{\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2} = 0$ dans $\hat{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2}$, qu'on insère à droite dans (26). On obtient, en revenant à une notation plus détaillée :

$$\Delta_{\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2} G^{I,N\backslash I} + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}_{\mathfrak{s}_2}} \Delta G^{I;\{\alpha,\beta\}}\, F^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};N\backslash I} [H^{(2)}(k_\alpha)]^{-1} [H^{(2)}(k_\beta)]^{-1}\, dk_\alpha = 0 \qquad (27$$

On procède alors par récurrence sur $n_1 = |I|$ et $n_2 = |N\backslash I|$ en partant du cas $n_1 = n_2 = 2$, où (27) est une équation de Fredholm homogène (de contour $\mathcal{C}_{\mathfrak{s}_2}$) :

$$\Delta G^{\{1,2\};\{\alpha,\beta\}} \circledast \left[\mathbb{1} + \frac{1}{2}\, F^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};\{3,4\}} \right] = 0$$

Ici le noyau de droite possède un inverse à droite :

$$\left[\mathbb{1} + \frac{1}{2}\, F^{\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\};\{\lambda,\mu\}} \right] \circledast \left[\mathbb{1} - \frac{1}{2}\, G^{\{\underline{\lambda},\underline{\mu}\};\{3,4\}} \right] = \mathbb{1} \qquad (28)$$

(c'est la définition de $G^{\{\alpha,\beta\};\{3,4\}}$). D où il vient

$$\Delta\, G^{\{1,2\};\{3,4\}} = 0$$

dans la réunion des tubes aplatis $\hat{\mathcal{T}}_{1\uparrow 2,3\uparrow 4}$. Par récurrence sur n_1 et n_2, cette relation insérée à son tour dans (27) achève la preuve de la première partie du Théorème 2.

iii) Pour démontrer la réciproque, on part des relations

$$\Delta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} G^{I,N\setminus I} = 0$$

qu'on insère à gauche dans (26). Il vient

$$\Theta_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2} - \frac{1}{2} G^{I;\{\alpha,\beta\}} \otimes \Theta_{\underline{\alpha}\uparrow\underline{\beta},\mathcal{S}_2} = 0 \qquad (29)$$

On procède encore par récurrence. Pour $n_1 = n_2 = 2$, (29) est une équation de Fredholm homogène (de contour $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_1}$) dont le noyau est inversible à gauche (voir (28)) :

$$\left[\mathbb{1} - \frac{1}{2} G^{\{1,2\};\{\alpha,\beta\}} \right] \otimes \Theta_{\underline{\alpha}\uparrow\underline{\beta},3\uparrow 4} = 0$$

On obtient $\Theta_{1\uparrow 2,3\uparrow 4} = 0$ dans la réunion des tubes aplatis $\hat{\mathcal{T}}_{1\uparrow 2,3\uparrow 4}$. Comme précédemment ceci inséré dans (29) achève par récurrence sur n_1 et n_2 la preuve de la réciproque.

V.4 Remarques finales.

1. Le Théorème 2 établit que les fonctions $G^{I,N\setminus I}(k;\frac{1}{2})$ possèdent dans le canal $(I,N\setminus I)$ la région de coïncidence suivante :

$$\hat{\mathcal{R}}_I^{(2)} = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : p_I^2 < 9m^2,\ H^{(2)}(p_I) \neq 0,\ A(p_I;\tfrac{1}{2}) \neq 0\}$$

$\hat{\mathcal{R}}_I^{(2)}$ est ouvert et dense dans $\mathcal{R}_I^{(2)}$. Les restrictions correspondent à la présence éventuelle de singularités du type C.D.D. ou C.D.D. généralisé. On étudiera la possibilité de les réduire dans une publication ultérieure[6].

2. La possibilité pour les fonctions $G^{I,N\setminus I}$ de posséder un pôle fixe à $\lambda = \frac{1}{2}$ induit par un zéro fixe de $A(p_I;\lambda)$ y sera également écartée.

3. Les fonctions $G^{I,N\setminus I}(k;\lambda)$ ont été ici définies en plaçant sur chaque ligne interne de convolution l'inverse d'une fonction de deux points complète $[H^{(2)}(k_\alpha)]^{-1}$ (resp. $[H^{(2)}(k_\beta)]^{-1}$). Ceci possède le désavantage d'engendrer d'éventuels pincements des contours entre les pôles réels $\{k_\alpha^2 = a_\nu\}$ et $\{k_\beta^2 = a_\nu\}$, $0 < a_\nu < m^2$, des fonctions de ligne $[H^{(2)}(k_\alpha)]^{-1}$ et $[H^{(2)}(k_\beta)]^{-1}$. Cette possibilité est distincte de la présence éventuelle (rencontrée ci-dessus) de singularités du type C.D.D. (ou C.D.D. généralisé) dans le canal $(I,N\setminus I)$. Elle a été ignorée dans la preuve de l'irréductibilité des fonctions $G^{I,N\setminus I}(k;1/2)$: pour l'éviter il suffit en effet de se restreindre au choix $[\frac{k_\alpha^2 - m^2}{-Z}]$ (resp. $[\frac{k_\beta^2 - m^2}{-Z}]$) pour chaque facteur de ligne.

VI. CONCLUSION ET PERSPECTIVES.

L'étape suivante du programme non linéaire hors de la couche de masse consiste pour l'essentiel à définir dans le formalisme de Steinmann-Ruelle-Araki des fonctions irréductibles d'ordre de plus en plus élevé.

Le mécanisme dégagé ici pour $p \leq 2$ semble pouvoir être reproduit aux ordres supérieurs :

i) Incorporer au formalisme des fonctions de n points certaines relations intégrales formelles de la théorie des perturbations et les choisir comme définitions (avec une récurrence convenable) des fonctions irréductibles d'ordre $p_o > 2$.

ii) Exhiber la structure analytique et algébrique linéaire primitive de ces objets à l'aide des propriétés des produits de convolution.

iii) Dans la région à p_o particules établir une équivalence entre les propriétés analytiques d'irréductibilité d'ordre p_o (nullité d'une partie absorptive) des fonctions introduites et les propriétés algébriques non linéaires des fonctions irréductibles d'ordre $(p_o - 1)$ (du type relations de complétude).

Les progrès à ce stade devraient provenir d'une meilleure analyse des produits de convolution. Une clarification de la structure analytique de leurs parties absorptives permettrait certainement de construire un algorithme algébrique simple (du type de (26)) reliant l'algèbre non linéaire des relations de complétude aux propriétés analytiques d'irréductibilité.

iv) Finalement établir les propriétés algébriques non linéaires du noyau d'ordre p_o dans toutes les régions à $p > p_o$ particules, à partir de celles du noyau d'ordre inférieur. Là encore un algorithme algébrique simple (similaire à (38) dans [4])devrait pouvoir être dégagé.

Les résultats présentés ici laissent en effet présumer l'existence d'une structure algébrique sous-jacente reliant directement propriétés d'irréductibilité et relations de complétude. Dégager cette structure algébrique devrait pouvoir s'effectuer assez facilement dans une première étape.

Cependant des difficultés apparaîtront pour lui donner un sens précis du point de vue des distributions. En particulier les hypothèses techniques suivantes dont le contrôle est difficile seront nécessaires :

i) hypothèse de régularité au bord du type du postulat de continuité de la mesure spectrale utilisé ici.

ii) hypothèses relatives à la présence de singularités du type C.D.D. généralisé induites par les zéros de déterminants de Fredholm à deux points (dont la complexité de structure ira croissant dans le programme).

Il conviendrait dans une seconde étape de réduire ces hypothèses. Les méthodes du programme non linéaire sur la couche de masse [12,13] seraient alors utiles.

Finalement les progrès dans la définition de fonctions irréductibles d'ordre de plus en plus élevé devraient permettre d'étendre le domaine d'analyticité de la fonction de n points originale dans des régions d'énergie de plus en plus élevée et éventuellement d'y dégager les singularités de Landau (tout au moins près des réels).

APPENDICE

Cet appendice est d'abord destiné à l'étude du comportement des deux premiers termes de (2) à la limite $p_I^2 = 4m^2$, par exemple :

$$\int_{\mathcal{C}_{\mathcal{S}_1}} H'(p_I,\hat{k}_1,k_\alpha)\ \Delta H'(p_I,-k_\alpha,\hat{k}_2)\ [H^{(2)}(k_\alpha)]^{-1}[H^{(2)}(p_I+k_\alpha)]^{-1}\ dk_\alpha$$

Comme en II.3.c il est utile de considérer le représentant de $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_1}$ (resp. $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_2}$) formé par la réunion d'une partie fixe $\mathbb{R}^3\times \underline{\mathcal{L}}$ et d'une "poignée" $\delta\gamma_1^+$ (resp. $\delta\gamma_1^-$)

A la limite $p_I^2 = 4m^2$, l'intégrale sur la partie fixe $\mathbb{R}^3\times \underline{\mathcal{L}}$ tend vers zéro : on utilise ici le fait que (pour les fonctions physiques considérées) $\Delta H''(p_I,-k_\alpha,\hat{k}_2)$ tend alors vers zéro uniformément sur tout compact en $(k_\alpha,\hat{k}_2)$ et qu'à l'infini l'intégrand est borné (uniformément en p_I) par une fonction intégrable de k_α.

Le comportement de la contribution de la poignée $\delta\gamma_1^+$ est donné par la proposition suivante :

Proposition A.1

A la limite $p_I^2 = 4m^2$, l'intégrale

$$\int_{\delta\gamma_1^+} H'(p_I,\hat{k}_1,k_\alpha)\ \Delta H''(p_I,-k_\alpha,\hat{k}_2)\ [H^{(2)}(k_\alpha)]^{-1}[H^{(2)}(k_\alpha+p_I)]^{-1}\ dk_\alpha \qquad (31)$$

tend vers zéro.

Preuve :

Puisque à $p_I^2 = 4m^2$ la poignée $\delta\gamma_1^+$ est pincée entre les singularités polaires γ_1 et γ_I, réécrivons d'abord (31) sous la forme :

$$\int_{\partial\gamma_1^+} G(p_I,\hat{k},k_\alpha)\ \frac{1}{k_\alpha^2-m^2}\ \frac{1}{(k_\alpha+p_I)^2-m^2}\,dk_\alpha \qquad (32)$$

où $G(p_I,\hat{k},k_\alpha)$ est une fonction analytique des variables $(\hat{k},k_\alpha)$, continue bornée en p_I, qui tend vers zéro à $p_I^2 = 4m^2$. Appliquons comme en II.3.c le théorème des résidus sous sa forme générale [9]. (32) devient :

$$\int_{\gamma_1^+} \left[\ G(p_I,\hat{k},k_\alpha)\ \frac{1}{(k_\alpha+p_I)^2-m^2}\right]_{\gamma_1} \frac{d\vec{p}_\alpha}{-2\omega(\vec{p}_\alpha)}$$

où le contour résidu γ_1^+ est défini comme sur la Figure 7. Si l'on paramètre γ_1 en coordonnées (ω,Ω) avec $\vec{p}_\alpha = r\Omega$, $|\Omega| = 1$, $\omega = \sqrt{r^2+m^2}$, l'expression peut se réécrire :

$$\int_m^\rho \frac{\sqrt{\omega^2-m^2}}{\frac{p_I^o}{2}-\omega-i\varepsilon}\ \frac{d\omega}{4p_I^o} \int G(p_I,\hat{k},k_\alpha)\,d\Omega$$

Utilisant l'analyticité de $G(p_I,\hat{k},k_\alpha)$ dans un voisinage du contour d'intégration $[m,\rho]$, on peut remplacer celui-ci par la réunion d'un segment réel $[m,\omega_1]$ (avec $\omega_1 < m$) et d'un arc γ' du demi-plan inférieur (d'extrémités (ω_1,ρ)). Sur γ' on peut majorer uniformément l'intégrand et lorsque p_I^o tend vers 2m, cette contribution tend vers zéro. Sur le segment $[m,\omega_1]$, l'intégrand peut-être majoré par

$$C(p_I^o)\ \frac{\sqrt{m-\omega}}{\frac{p_I^o}{2}-\omega}$$

où $C(p_I^o)$ tend vers zéro quand $p_I^o \to 2m$. Alors l'intégrale correspondante tend vers zéro.

Les résultats suivants concernent maintenant la continuité en p_I des fonctions $G^{I,N\setminus I}$. Nous avons la

Proposition A.2

Dans la région à deux particules $\{p_I \in \Sigma^{(2)}\}$, la convolution associée au graphe I $N\backslash I$ conserve le caractère continu borné en p_I des valeurs au bord.

Preuve : A l'intérieur du tube aplati

$$\mathcal{T}_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = \{(p_I,\hat{k}_1,\hat{k}_2) \in \mathbb{C}^{4(n-2)} : p_I \in \Sigma^{(2)} \ , \ \hat{k}_{1,2} \in \mathcal{T}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\}$$

on vérifie facilement que les valeurs au bord $H^G_{\underline{\varepsilon}^{\pm}}(p_I,\hat{k}_1,\hat{k}_2)$ sont données par la relation

$$H^G_{\underline{\varepsilon}^{\pm}}(p_I,\hat{k}_1,\hat{k}_2) = \int_{\mathcal{C}_{\underline{\varepsilon}^{\pm}}} H'(p_I,\hat{k}_1,k_\alpha)\, H''(p_I,-k_\alpha,\hat{k}_2)\,[H^{(2)}(k_\alpha)]^{-1}\,[H^{(2)}(k_\alpha+p_I)]^{-1}\, dk_\alpha$$

où $\mathcal{C}_{\underline{\varepsilon}^{\pm}}$ est un contour du même type que $\mathcal{C}_{\varepsilon_{1,2}}$, qui se faufile entre toutes les singularités de l'intégrand et se décompose en une partie fixe $\mathbb{R}^3 \times \underline{\ell}$ et une poignée $\delta\gamma_1^{\pm}$. Des considérations similaires à celles qui precèdent établissent alors le caractère continu borné en p_I de chacune de ces deux contributions.

Finalement, utilisant les notations de la section III, nous avons la

Proposition A.3

Les sommes des séries de Fredholm

$$B^{\pm}_{\underline{\varepsilon}}(Z,Z',P\,;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, B^{\pm}_n(Z,Z',P)$$

$$A^{\pm}_{\underline{\varepsilon}}(P\,;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, A^{\pm}_n(P)$$

sont analytiques en (Z,Z') et continues bornées en P dans $\Sigma^{(2)}$.

Preuve :

La Proposition précédente montre d'abord que

$$B_n^{\pm}(Z,Z',P) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \in V^+}} B_n(Z,Z',P \pm i\varepsilon)$$

$$A_n^{\pm}(P) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \in V^+}} A_n(P \pm i\varepsilon) \qquad (33)$$

sont analytiques en (Z,Z') et continues bornées en P dans $\Sigma^{(2)}$. Des considérations d'analyticité locale montrent ensuite qu'on dispose pour chacune de ces fonctions d'une définition explicite en déterminant de Fredholm $D(\{F_{\pm}(Z_i,Z_j,P)\})$ intégré sur un contour $(\mathcal{C}^{\pm})^n$, où $\mathcal{C}^{\pm}$ est du type "poignée" $\mathcal{C}^{\pm} = (\mathbb{R}^3 \times \underline{\mathcal{L}}) \cup \partial\gamma_1^{\pm}$. A partir des bornes de chaque $F_{\pm}(Z_i,Z_j,P)$ sur $\mathcal{C}^{\pm}$ (Proposition C.1 de [4]), la majoration d'Hadamard [11] établit alors la convergence absolue en λ des séries (33). Considérées comme séries de fonctions continues en P, elles convergent uniformément, ce qui établit le caractère continu borné en P de leurs sommes.

REFERENCES

[1] Lassalle, M. : Commun. Math. Phys. 36, 185 (1974) et ici, Première Partie.

[2] Symanzik, K. : J. Math. Phys. 1, 249 (1960) et in : Symposium on Theoretical Physics, Vol 3, Plenum Press (1967).

[3] Bros, J. : in Analytic methods in mathematical physics, Gordon and Breach (1967).

[4] Bros, J., Lassalle, M. : Commun. Math. Phys. to appear, et ici, Troisième Partie.

[5] Castillejo, L., Dalitz, R., Dyson, F.J. : Phys. Rev. 101, 453 (1966).

[6] Bros. J., Lassalle, M. : à paraître.

[7] Glaser, V., Lehmann, H., Zimmermann, W. : Nuovo Cimento, 6, 1122 (1957).

[8] Steinmann, O. : Commun. Math. Phys. 10, 245 (1968).

[9] Leray, J. : Bull. Soc. Math. Fr. 87, 81 (1959).

[10] Fotiadi, D., Froissart, M., Lascoux, J., Pham, F. : Topology, 4, 159 (1965).

[11] Lovitt, W.V. : Linear Integral Equations, Dover Publications (1950).

[12] Martin, A. : in Problems of Theoretical Physics, Moscou, Bauka (1969).

[13] Glaser, V. : Communication privée.